

كراسة

الرياضيات



الجذوع المشتركة للتعليم الثانوي التأهيلي
الجذع المشترك العلمي و التكنولوجي

Blaise Pascal

Descartes

Arquimedes

Isaac Newton

Leonhard Euler



كراستي

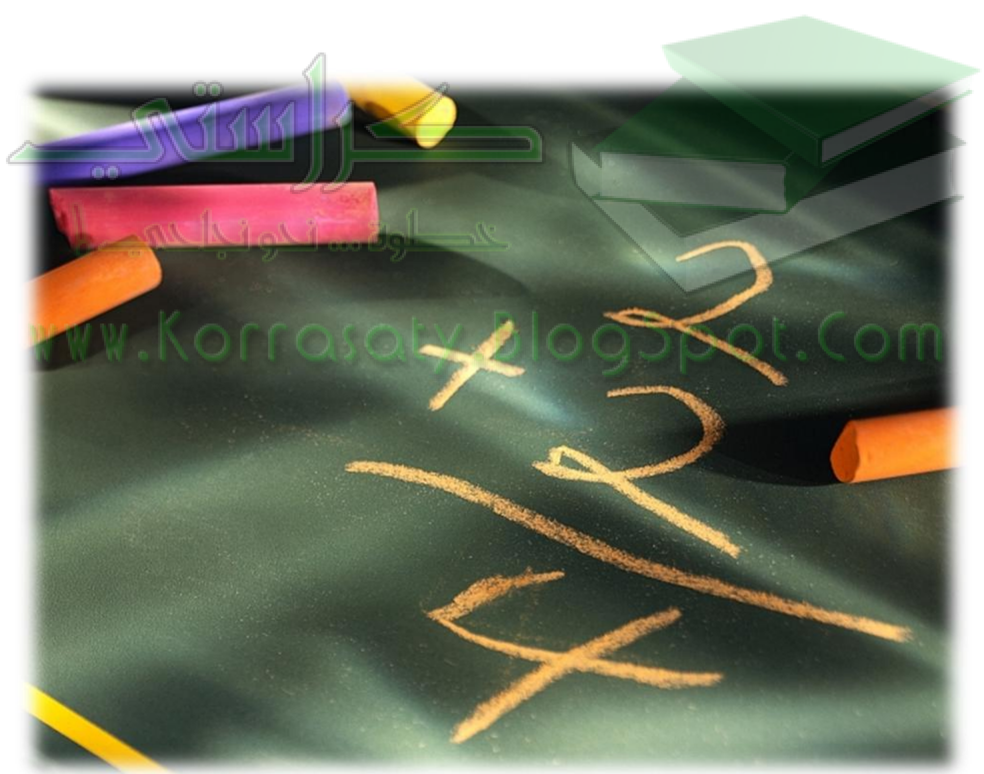
خطوة ... نحو نجاحي !

الفهرس



الحسابيات في N

- عدد الصفحات : [15]
- عدد التمارين : [14]
- عدد تمارين البحث : [12]





1 الحسابيات في N

1_ القواسم المشتركة لعددين صحيحين :

تعريف :

a و b عددين صحيحين طبيعيين.

نقول إن d قاسم مشترك لــ a و b إذا كان d يقسم a و b.

ملاحظة : العدد 1 دائما قاسم مشترك لــ a و b .

خاصية :

a و b عددين صحيحين طبيعيين

يوجد قاسم مشترك وحيد أكبر من كل القواسم المشتركة. يسمى القاسم المشترك الأكبر

لــ a و b ونرمزله بــ PGCD (a , b) أو بــ $a \wedge b$

مثال : قواسم 8 هي 1 , 2 , 4 , 8

قواسم 12 هي 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 12

القواسم المشتركة لــ 8 و 12 هي 1 , 2 , 4

ومنه PGCD (8 , 12) = 4

2_ عددان أوليان فيما بينهما :

تعريف :

إذا كان PGCD (a , b) = 1 فإن a و b أوليان فيما بينهما.

مثال :

2 و 5 أوليان فيما بينهما.

3 و 6 غيرأوليان فيما بينهما.



3ـ الأعداد الأولية :

تعريف :

a عدد صحيح طبيعي غير منعدم

نقول إن a عدد أولي premier إذا كانت قواسمه الوحيدة هي

1 و a

مثال : 2 , 3 , 5 , 7 , 13 أعداد أولية.

4ـ البحث عن القاسم المشترك الأكبر : خوارزمية أقليدس

خاصية :

a و b عددين صحيحين طبيعيين.

r هو باقي قسمة a على b $(b < a)$

إذن $a \wedge b = b \wedge r$

مثال :

$$36 \wedge 21 = 21 \wedge 15 = 15 \wedge 6 = 6 \wedge 3 = 3$$

$$36 = 21 \times 1 + 15$$
$$21 = 15 \times 1 + 6$$
$$15 = 6 \times 2 + 3$$

ومنه : خوارزمية أقليدس أو (طريقة القسمات المتتالية) لتحديد $a \wedge b$

لتحديد $a \wedge b$:

أولا : نقسم a على b فنحصل على باقي r

ثانيا : إذا كان $r = 0$ فإن $a \wedge b = b$

ثالثا : إذا كان $r \neq 0$ نعوض a بـ b و b بـ r ثم نعيد العملية، نتوقف عندما نحصل على باقي منعدم ويكون القاسم المشترك الأكبر لـ a و b هوآخر باقي غير منعدم .

مثال : حدد $1078 \wedge 322$

المرحلة	a	b	الباقي
1	1078	322	112
2	322	112	98
3	112	98	14
4	98	14	0

إذن $1078 \wedge 322 = 14$

5ـ كسر غير قابل للاختزال :

تعريف :

a و b عددين صحيحين طبيعيين بحيث $b \neq 0$.

$\frac{a}{b}$ كسر غير قابل للاختزال إذا كان a و b أوليان فيما

مثال : $\frac{3}{5}$ كسر غير قابل للاختزال

$\frac{13}{17}$ كسر غير قابل للاختزال

$\frac{25}{48}$ كسر غير قابل للاختزال

6ـ كيف نتعرف على عدد أولي :

لتحديد هل عدد a أولي ننجز قسمات هذا العدد على الأعداد الأولية المتتابعة.

- إذا كان الباقي يساوي صفر فإن هذا العدد ليس أوليا
- إذا كان البواقي غير منعدمة نتابع هذه القسمات حتى نحصل على خارج أصغر من أو تساوي القاسم في هذه الحالة سيكون العدد أوليا.

مثال : ① هل العدد 97 أولي .

لدينا $97 = 48 \times 2 + 1$

$97 = 32 \times 3 + 1$

$97 = 19 \times 5 + 2$

$97 = 13 \times 7 + 6$

$97 = 8 \times 11 + 9$



حيث أن $11 > 8$ والباقي $0 \neq 9$ إذن 97 عدد أولي .

مثال ② : هل العدد 259 أولي .

$$259 = 129 \times 2 + 1$$

$$259 = 86 \times 3 + 1$$

$$259 = 51 \times 5 + 4$$

$$259 = 37 \times 7 + 0$$

إذن 259 عدد غير أولي .

7- كيفية تفكيك عدد إلى جداء عوامل أولية :

نقسم العدد على الأعداد الأولية المتتالية ونكتب في كل مرة الخارج تحت المقسوم.

مثال :

2520	2
1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

وبالتالي $2520 = 2^3 . 3^2 . 5 . 7$

8- المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين:

خاصية وتعريف :

ليكن a و b عددين صحيحين غير منعدمين

مضاعفات a هي $0 , a , 3a , 2a , 4a \dots\dots\dots ka$

مضاعفات b هي $0 , b , 2b , 3b , \dots\dots\dots pb$

هناك مضاعفات مشتركة لـــ a و b يوجد عدد وحيد غير منعدم

هو أصغر هذه المضاعفات المشتركة لـــ a و b.

نرمز بـــ $ppmc(a , b)$ أو $a \vee b$

مثال : $3 \vee 4 = 12$; $4 \vee 8 = 8$; $6 \vee 8 = 24$



تمارين وحلولها

تمرين 1 :

1 - حدد لائحة قواسم العددين 42 و70

2 - استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 42 و70.

الجواب :

1 - قواسم العدد 42 هي :

$D_{42}=\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$

قواسم العدد 70 هي :

$D_{70}=\{1,2,5,7,10,14,35,70\}$

2 -من خلال ما سبق فإن أكبر قاسم مشترك لـ 42 و70 هو 14.

إذن $PGCD(42,70)=14$

تمرين 2 :

1 - حدد لائحة قواسم العددين 28 و75

2 - استنتج $PGCD(28,75)$

3 - ماذا تستنتج بالنسبة لـ 28 و75.

الجواب :

1 - قواسم العدد 28 هي :

$D_{28}=\{1,2,4,14,28\}$

قواسم العدد 75 هي :

$D_{75}=\{1,3,15,25,75\}$

2 - من خلال السؤال 1 فإن :

$PGCD(28,75)=1$

3 - بما أن $PGCD(28,75)=1$ فإن 28 و75 أوليان فيما بينهما.

تمرين 3 :

فكك الأعداد التالية إلى جداء عوامل أولية :

735 - 1449 - 2225 - 86625 - 11730

الجواب :

تفكيك العدد 11730

11730	2
5865	5
1173	3
391	17
23	23
1	

ومنه فإن $11730=2.5.3.17.23$

تفكيك العدد 86625

86625	5
17325	5
3465	5
693	3
231	3
77	7
11	11
1	

وبالتالي $86625 = 3^2 . 5^3 . 7 . 11$

تفكيك العدد 2225

2225	5
445	5
89	89
1	

وبالتالي $2225 = 5^2 . 89$ (العدد 89 عدد أولي)

تفكيك العدد 1449

1449	3^2
161	7
23	23
1	

وبالتالي $1449 = 3^2 . 7 . 23$

تفكيك العدد 735

735	5
147	7
21	7
3	3
1	

وبالتالي $735 = 5 . 7^2 . 3$

تمرين 4 :

حدد المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b في كل حالة :

1) $a = 12$; $b = 8$

2) $a = 3$; $b = 4$

3) $a = 5$; $b = 20$

الجواب :

1) مضاعفات العدد 12 هي :

$M_{12} = \{12 , 24 , 36 , 48 , 60 , 72 , ...\}$

مضاعفات العدد 8 هي :

$M_8 = \{8 , 16 , 24 , 32 , 40 , 48 , ...\}$

إذن $ppmc\ (12 , 8) = 24$

2) مضاعفات العدد 9 هي :

$M_9 = \{9 , 18 , 27 , 36 , 45 , 54 , ...\}$

مضاعفات العدد 4 هي :

$M_4 = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36......\}$

إذن $ppmc\ (9 , 4) = 36$

3) مضاعفات العدد 5 هي :

$M_5 = \{5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30 , ...\}$

مضاعفات العدد 20 هي :

$M_{20} = \{20 , 40 , 60 , 80 , ...\}$

ومنه $ppmc\ (5 , 20) = 20$

تمرين 5 :

1 - بين أن $n^2 + n$ عدد زوجي لكل $n \in \mathbb{N}$

2 - بين أنه إذا كان n زوجي فإن n^2 عدد زوجي حيث $n \in \mathbb{N}$

الجواب :

1 - ليكن $n \in \mathbb{N}$ لدينا



$n^2 + n = n(n+1)$

إذا كان n زوجي فإن $n = 2k$ فإن $k \in \mathbb{N}$

إذن $n^2 + n = 2k(2k+1)$

$= 2p$

حيث $p = k(2k+1)$

ومنه $n^2 + n$ زوجي .

إذا كان n فردي فإن $n = 2k + 1$

فإن $k \in \mathbb{N}$

إذن $n^2 + n = (2k+1)(2k+1+1)$

$= (2k+1)(2k+2)$

$= 2(2k+1)(k+1)$

$= 2p'$

حيث $p' = (2k+1)(k+1)$

ومنه $n^2 + n$ عدد زوجي .

إذن في الحالتين فإن $n^2 + n$ عدد زوجي .

2 - ليكن $n \in \mathbb{N}$ بحيث n عدد زوجي إذن

$n = 2p$ حيث $p \in \mathbb{N}$

ومنه $n^2 = 4p^2 = 2(2p^2)$

$= 2k$ حيث $k = 2p^2$

وبالتالي n^2 عدد زوجي .

تمرين 6 :

ليكن n عدد صحيح طبيعي

بين أنه إذا كان n^2 زوجي فإن n عدد زوجي

الجواب :

ليكن n عدد صحيح طبيعي بحيث n^2 زوجي

نفترض أن n فردي إذن $n = 2k + 1$

حيث $k \in \mathbb{N}$

ومنه $n^2 = (2k+1)^2$

$= 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1$

إذن $n^2 = 2p + 1$

حيث $p = 2k^2 + 2k$

وبالتالي n^2 عدد فردي وهذا يناقض كون n^2 زوجي .

إذن الإفتراض الأول خاطئ ومنه n عدد زوجي.

تمرين 7 :

ليكن $a = 27$ و $b = 24$

1 - حدد القاسم المشترك الأكبر لـــ a و b والمضاعف المشترك الأصغر لـــ a و b

2 - تحقق أن

$PGCD(a, b) \times ppmc(a, b) = ab$

الجواب :

1 -a- قواسم 27 هي : $1 ; 3 ; 9 ; 27$



قواسم 24 هي :

24 ; 12 ; 8 ; 6 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1

إذن $PGCD(24, 27) = 3$

لدينا $27 = 3^3$ و $24 = 3 . 2^3$

إذن المضاعف المشترك الأصغر لـ 27 و 24

هو : $m = 3^3 . 2^3 = 216$

ومنه $ppmc(27, 24) = 216$

2 - لدينا :

$PGCD(a, b) \times ppmc(a, b) = 216 . 3$

$= 648$

$ab = 27 . 24 = 648$

وبالتالي :

$PGCD(a, b) \times ppmc(a, b) = ab$

تمرين 8 :

a و b عددان صحيحان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

1 - بين أن :

$(a + b) \wedge b = 1$

$(a + b) \wedge b = 1$ (نقبل أن $a^2 \wedge b^2 = 1$)

2 - a - بين أن : $(n + 1) \wedge (n + 2) = 1$

ثم استنتج أن $\frac{2n + 3}{n^2 + 3n + 2}$ كسر غير قابل للاختزال.

b - تطبيق :

بين أن $\frac{39}{380}$ كسر غير قابل للاختزال.

الجواب :

1 - لدينا $a \wedge b = 1$

ليكن d القاسم المشترك الأكبر لـ b و $a + b$

إذن d يقسم b و $a + b$

ومنه d يقسم $a + b - b$ أي a

إذن d يقسم a و b

إذن d يقسم $a \wedge b = 1$

ومنه $d = 1$ وبالتالي : $(a + b) \wedge b = 1$

لدينا $a \wedge b = 1$

ليكن d القاسم المشترك الأكبر لـ $a + b$ و ab.

إذن d يقسم ab ويقسم $a + b$

ومنه d يقسم ab ويقسم $a(a + b)$

إذن d يقسم $a(a + b) - ab$

أي d يقسم a^2 .

كذلك d يقسم ab و $b(a + b)$

ومنه d يقسم $b(a + b) - ab$

أي d يقسم b^2

إذن d يقسم a^2 و b^2

ومنه d يقسم $a^2 \wedge b^2 = 1$ وبالتالي $d = 1$

ومنه $(a + b) \wedge ab = 1$





2 - a - نضع $(n+1) \wedge (n+2) = d$

إذن d يقسم $n+1$ و d يقسم $n+2$

ومنه d يقسم $(n+2) - (n+1) = 1$

ومنه $d = 1$ وبالتالي:

$(n+2) \wedge (n+1) = 1$

نضع $a = n+1$ و $b = n+2$

لدينا $a \wedge b = 1$

إذن $(a+b) \wedge ab = 1$

أي $(2n+3) \wedge (n^2+3n+2) = 1$

لأن $a+b = 2n+3$

و $ab = n^2+3n+2$

ومنه $\frac{2n+3}{n^2+3n+2}$ كسر غير قابل للاختزال.

-b- لنحدد n بحيث $2n+3 = 39$

إذن $n = 18$

لدينا $2n+3 = 39$

$n^2+3n+2 = 380$

وبما أن $\frac{2n+3}{n^2+3n+2}$ غير قابل للاختزال

فإن $\frac{39}{380}$ غير قابل للاختزال

تمرين 9 :

حدد المضاعف المشترك الأصغر لـ a و b في كل حالة :

1) $a = 12$; $b = 8$

2) $a = 9$; $b = 4$

3) $a = 5$; $b = 20$

الجواب :

1) لدينا $a = 12 = 3 . 2^2$

$b = 8 = 2^3$

إذن المضاعف المشترك الأصغر هو :

$a \vee b = 3^2 . 2^2 = 24$

2) لدينا $a = 9 = 3^2$

$b = 4 = 2^2$

إذن المضاعف المشترك الأصغر لـ 9 و 4

هو : $a \vee b = 3^2 . 2^2 = 36$

وبالتالي : $a \vee b = 36$

3) لدينا 5 تقسم 20 إذن المضاعف المشترك الأصغر لـ 5 و 20 هو :

$20 \vee 5 = 20$

تمرين 10 :

حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y في الحالات التالية وذلك باستعمال خوارزمية أقليدية

(طريقة القسمات المتتالية) :

1 - $x = 837$; $y = 1085$

2 - $x = 5128$; $y = 9615$

3 - $x = 1789$; $y = 1515$



الجواب :

1 - لنحدد $1085 \wedge 837$

المرحلة	x	y	الباقي
1	837	1085	248
2	248	837	93
3	93	248	62
4	62	93	31
5	31	62	0

$1085 = 837 \times 1 + 248$

$837 = 248 \times 3 + 93$

$248 = 93 \times 2 + 62$

$93 = 62 \times 1 + 31$

$62 = 31 \times 2 + 0$

وبالتالي $1085 \wedge 837 = 31$

2 - لنحدد $9615 \wedge 5128$

المرحلة	x	y	الباقي
1	5128	9615	4487
2	4487	5128	641
3	641	4487	0

$9615 = 5128 \times 1 + 4487$

$5128 = 4487 \times 1 + 641$

$4487 = 641 \times 7 + 0$

وبالتالي $9615 \wedge 5128 = 641$

3 - لنحدد $1789 \wedge 1515$

المرحلة	x	y	الباقي
1	1515	1789	274
2	274	1515	145
3	145	274	129
4	129	145	16
5	16	129	1
6	1	16	0

$1789 = 1515 \times 1 + 274$

$1515 = 274 \times 5 + 145$

$274 = 145 \times 1 + 129$

$145 = 129 \times 1 + 16$

$129 = 16 \times 8 + 1$

$16 = 16 \times 1 + 0$

وبالتالي $1789 \wedge 1515 = 1$

تمرين 11 :

1 - حدد $d = PGCD\ (102\ ,\ 119)$

2 - تحقق من أن $\frac{119}{d}$ و $\frac{102}{d}$ أوليين فيما بينهما.

الجواب :

1- لدينا $199 = 102 \times 1 + 17$

$102 = 17 \times 6 + 0$

إذن حسب خوارزمية أقليدية فإن :

$PGCD\ (102\ ,\ 119) = 17$



2 - لدينا $\frac{119}{17} = 7$ و $\frac{102}{17} = 6$

6 و 7 متتابعان إذن $7 \wedge 6 = 1$

ومنه $\frac{119}{d} \wedge \frac{102}{d} = 1$

أي $\frac{119}{d}$ و $\frac{102}{d}$ أوليان فيما بينهما .

تمرين 12 :

أجعل النسبة غير قابلة للأختزال في الحالات التالية :

أ - $\frac{3172}{915}$

ب - $\frac{2332}{47223}$

ج - $\frac{30227}{36019}$

الجواب :

أ - لنحدد القاسم المشترك الأكبر لـ 3172 و 915

$$3172 = 3\times 915 + 427$$

$$915 = 2 \times 427 + 61$$

$$427 = 7 \times 61 + 0$$

ومنه $915 \wedge 3172 = 61$

إذن $\frac{3172}{915} = \frac{61 \times 52}{61 \times 15}$

إذن $\frac{3172}{915} = \frac{52}{15}$

ب - لنحدد القاسم المشترك الأكبر لـ 2332 و 47223

$$47223 = 2332 \times 20 + 583$$

$$2332 = 583 \times 4 + 0$$

ومنه $47223 \wedge 2332 = 583$

إذن $\frac{3172}{915} = \frac{583 \times 4}{583 \times 81}$

ومنه $\frac{2332}{47223} = \frac{4}{81}$

ب - لنحدد القاسم المشترك الأكبر لـ : 36019 و 30227

$$36019 = 30227 \times 1 + 5792$$

$$30227 = 5792 \times 5 + 1267$$

$$5792 = 1267 \times 4 + 724$$

$$1267 = 724 \times 1 + 543$$

$$724 = 543 \times 1 + 181$$

$$543 = 181 \times 3 + 0$$

ومنه $30227 \wedge 36019 = 181$

إذن $\frac{30227}{36019} = \frac{167 \times 181}{199 \times 181}$

ومنه $\frac{30227}{36019} = \frac{167}{199}$

تمرين 13 :

حدد عددين صحيحين طبيعيين x و y بحيث:

$$xy = 3x + 2y$$



الجواب :

$xy = 3x + 2y$ يعني $xy - 3x = 2y$

يعني $x(y - 3) = 2y - 6 + 6$

يعني $x(y - 3) = 2(y - 3) + 6$

يعني $x(y - 3) - 2(y - 3) = 6$

يعني $(y - 3)(x - 2) = 6$

يعني $(y - 3)(x - 2) = 2 \times 3 = 1 \times 6$

يعني $x - 2 = 2$ و $y - 3 = 3$

أو $x - 2 = 6$ و $y - 3 = 1$

يعني $x = 4$ و $y = 6$

أو $x = 8$ و $y = 4$

إذن $S = \{(4 , 6) ; (8 , 4)\}$

تمرين 14 :

ليكن n عدد صحيح طبيعي .

نضع $F = \frac{n + 9}{n - 6}$

1 - حدد في كل حالة الشكل المختزل لــ F

$n = 9$; $n = 25$; $n = 46$

2 - بين أن $F = 1 + \frac{15}{n - 6}$

3 - حدد جميع قيم n التي من أجلها يكون F عدد صحيح طبيعي .

الجواب :

1 - إذا كان $n = 9$ فإن :

$$F = \frac{9 + 9}{9 - 6} = \frac{18}{3} = 6$$

إذا كان $n = 25$ فإن :

$$F = \frac{25 + 9}{25 - 6} = \frac{34}{19}$$

وهذا هو الشكل المختزل لــ F لأن 34 و19 أوليان فيما بينهما.

إذا كان $n = 46$ فإن :

$$F = \frac{46 + 9}{46 - 6} = \frac{55}{40} = \frac{11}{8}$$

وهذا الشكل المختزل لــ F.

2 - لدينا

$$F = \frac{n + 9}{n - 6} = \frac{n - 6 + 15}{n - 6} = 1 + \frac{15}{n - 6}$$

وبالتالي $F = 1 + \frac{15}{n - 6}$

3 - لدينا $F = 1 + \frac{15}{n - 6}$

$F \in \mathbb{N}$ تكافئ $1 + \frac{15}{n - 6} \in \mathbb{N}$

تكافئ $\frac{15}{n - 6} \in \mathbb{N}$

يعني $n - 6$ تقسم 15

يعني

$n - 6 = 1$ أو $n - 6 = 3$ أو $n - 6 = 5$ أو $n - 6 = 15$

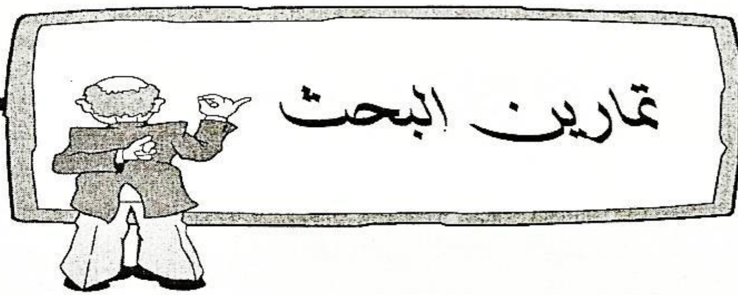
يعني

$n = 7$ أو $n = 9$ أو $n = 11$ أو $n = 21$

إذن $F \in \mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان :

$n = 7$ أو $n = 9$ أو $n = 11$ أو $n = 21$





تمرين 1 :

1 - حدد لائحة قواسم العددين 56 و80

2 - استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 56 و80

تمرين 2 :

حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y في الحالات التالية وذلك باستعمال خوارزمية أقليدس

1 - $x = 2925$; $y = 9720$

2 - $x = 832$; $y = 3653$

3 - $x = 16436$; $y = 1569872$

تمرين 3 :

1 - حدد $d = PGCD\ (118404\ ,\ 13884)$

2 - تحقق من أن $\frac{118404}{d}$ و $\frac{13884}{d}$ أوليين فيما بينهما.

تمرين 4 :

فكك الأعداد التالية إلى جداء عوامل أولية :

$x = 137200$; $y = 496125$

$z = 13824$; $t = 7776$

تمرين 5 :

ليكن p عدد صحيح طبيعي .

1 - بين أن 3 يقسم $p\,(p^2 - 1)$

2 - بين أن 4 يقسم $p^2\,(p^2 - 1)$



تمرين 6 :

ليكن $a \in \mathbb{N}$

بين أن : $(a+1)^3 - a^3 - 1$ يقبل القسمة على 3

تمرين 7 :

ليكن $k \in \mathbb{N}$

بين أن العدد $7^{3k+2} . 11^{3k+1} . 5^{3k} + 539$ قابل للقسمة على 1078

تمرين 8 :

بين أن مجموع خمس قوى متتابعة للعدد 7 قابل للقسمة على 2801

تمرين 9 :

حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلات :

(1 $3x + 2y - 12 = 0$

(2 $x + y + x . y = 10$

تمرين 10 :

ليكن x و y من $\mathbb{N}$ بحث $x \wedge y = 18$

1 - تحقق أن $x' = \frac{x}{18}$ و $y' = \frac{y}{18}$ أوليان فيما بينهما.

2 - حل في $\mathbb{N}^2$ النظمة :

$$\begin{cases} x + y = 360 \\ x \wedge y = 18 \end{cases}$$

تمرين 11 :

القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين هو32، أكبر هذين العددين هو 288، ما هو العدد الثاني، أوجد جميع الحلول الممكنة.

تمرين 12 :

a و b عددان صحيحان طبيعيان فرديان

بين أن 8 يقسم $a^2 + b^2 - 2$



العمليات في R - المعادلات من الدرجة الأولى - الحدوديات و النضمات

- عدد الصفحات : [39]
- عدد التمارين : [34]
- عدد تمارين البحث : [09]





2 العمليات في $\mathbb{R}$ ـ المعادلات من الدرجة الأولى الحدوديات والنظمات

1 ـ الجذور المربعة :

لكل a و b من $\mathbb{R}^+$

* $\sqrt{a^2} = a$

* $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

* $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad ; \quad b \neq 0$

* $\sqrt{x} = a$ تكافئ $x = a^2$, $x \in \mathbb{R}^+$

2 ـ التناسبية :

a و b و c و d من $\mathbb{R}^*$

a و b و c و d متناسبة (في هذا الترتيب)

تعني أن : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

خاصية :

إذا كانت a و b و c و d متناسبة و m و n من $\mathbb{R}$ حيث $ma + nc \neq 0$

و $mb + nd \neq 0$ فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{ma + nc}{mb + nd}$

3ـ القوى في المجموعة $\mathbb{R}$:

a و b $\mathbb{R}^*$ و m و n من Z

$a^n.a^m = a^{n+m} \quad ; \quad a^1 = a \; ; \quad a^0 = 1$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad ; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad ; \quad (a^n)^m = a^{n \times m}$

$(a \times b)^n = a^n \times b^n \quad ; \quad (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

4ـ المتطابقات الهامة :

لكل a و b من $\mathbb{R}$



$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

لكل a و b من $\mathbb{R}$ و n $\mathbb{N}^*$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \text{...........} + a.b^{n-2} + b^{n-1})$

5 ـ الحدوديات :

$p(x)$ حدودية حيث $d°P(x) \geq 2$ و $\alpha \in \mathbb{R}$

α جذر لـ $p(x)$ تكافئ $p(\alpha) = 0$

$p(x)$ تقبل القسمة على $(x - \alpha)$ تعني أن α جذر لـ $p(x)$.

إذاكان α جذر لـ $p(x)$ فإنه يوجد حدودية $Q(x)$ حيث :

$p(x) = (x - \alpha).Q(x)$

6 ـ النظمات :

طريقة المحددات :

$$I \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$



إذا كانت $\Delta \neq 0$ فإن (I) تقبل حلا وحيدا وهو : $\left(\frac{\Delta x}{\Delta} \; ; \frac{\Delta y}{\Delta}\right)$

إذا كانت $\Delta = 0$ و $\Delta x \neq 0$ أو $\Delta y \neq 0$

فإن $S = \varnothing$

إذا كانت $\Delta = 0$ و $\Delta x = 0$ و $\Delta y = 0$

فإن (I) تكافئ $ax + by + c = 0$ و

$$S = \left\{\left(x \; ; \frac{c - ax}{b}\right) / x \in \mathbb{R} \right\}$$

هناك طرق أخرى لحل النظمات : طريقة التألفية الخطي – وطريقة التعويض.

نقبل الخاصية التالية :

خاصية :

ليكن (D) مستقيما معادلته

$ax + by + c = 0$ بالنسبة لمعلم $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ المستقيم (D) يحدد نصفي مستوى مفتوحين.

أحدهما هو مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث $ax + by + c > 0$ والآخر هو مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث $ax + by + c < 0$

تمارين وحلولها

تمرين 1 :

بسط الأعداد التالية :

$A = \sqrt{12} \times \sqrt{27} + \sqrt{6\sqrt{100}+4}$

$B = \sqrt{17 - 2\sqrt{30}} \times \sqrt{17+2\sqrt{30}}$

$C = \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{432}} + \dfrac{\sqrt{0,0032}}{\sqrt{0,0018}}$

الجواب :

$A = \sqrt{12} \times \sqrt{27} + \sqrt{6\sqrt{100}+4}$

$= (2\sqrt{3}) \times (3\sqrt{3}) + \sqrt{6 \times 10 + 4}$

$= 6\sqrt{3}^2 + \sqrt{64}$

$= 6 \times 3 + 8$

$= 18 + 8$

$= 26$

إذن $\boxed{A = 26}$

* لدينا :

$B = \sqrt{17 - 2\sqrt{30}} \times \sqrt{17+2\sqrt{30}}$

$= \sqrt{(17 - 2\sqrt{30}) \times (17 - 2\sqrt{30})}$

$= \sqrt{17^2 - (2\sqrt{30})^2}$

$= \sqrt{289 - 120}$

$= \sqrt{169}$

$= \sqrt{13^2}$

$= 13$

وبالتالي :

$\boxed{B = 13}$

$C = \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{432}} + \dfrac{\sqrt{0,0032}}{\sqrt{0,0018}}$

$C = \sqrt{\dfrac{27}{432}} + \sqrt{\dfrac{0,0032}{0,0018}}$

$C = \sqrt{\dfrac{27}{27 \times 16}} + \sqrt{\dfrac{32 \times 10^{-4}}{18 \times 10^{-4}}}$

$C = \sqrt{\dfrac{1}{16}} + \sqrt{\dfrac{16}{9}}$

$C = \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{3}$

$C = \dfrac{3 + 16}{12}$

$C = \dfrac{19}{12}$

إذن $\boxed{C = \dfrac{19}{12}}$

تمرين 2 :

بسط الأعداد التالية :

$E = (\sqrt{75} - \sqrt{98}) \times (5\sqrt{3} + 7\sqrt{2})$

$F = (\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}) \times (\sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{3})$

$G = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

$H = \sqrt{11 - \sqrt{120}}$

الجواب :

لدينا :

$E = (\sqrt{75} - \sqrt{98}) \times (5\sqrt{3} + 7\sqrt{2})$

$$E = \left(\sqrt{25\times3}\ \ \sqrt{49\times2}\right)\times\left(5\sqrt{3}+7\sqrt{2}\right)$$

$$E = \left(5\sqrt{3}-7\sqrt{2}\right)\times\left(5\sqrt{3}+7\sqrt{2}\right)$$

$$E = \left(5.\sqrt{3}\right)^2-\left(7.\sqrt{2}\right)^2$$

$$E = 75 - 98$$

$$E = -23$$

إذن $\boxed{E = -23}$

$$F = \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\times\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$$

$$= \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\times\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$$

$$= \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2$$

$$= 8 + 2\sqrt{15} - 7$$

$$= 1 + 2\sqrt{15}$$

إذن $\boxed{F = 1 + 2\sqrt{15}}$

لدينا :

$$G = \sqrt{9\ \ 4\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{9 - 2.2\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{5 + 4\ \ 2.2\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{5}^2 + 2^2\ \ 2.2\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{5} - 2\right)^2}$$

وبما أن : $\sqrt{5} > 2$ فإن

$\boxed{G = \sqrt{5} - 2}$

لدينا :

$$H = \sqrt{11 - \sqrt{120}}$$

$$H = \sqrt{11 - 2.\sqrt{30}}$$

$$= \sqrt{11 - 2.\sqrt{6}\times\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{6}^2 + \sqrt{5}^2 - 2\sqrt{6}\times\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right)^2}$$

وبما أن $\sqrt{6} > \sqrt{5}$ فإن

$\boxed{H = \sqrt{6} - \sqrt{5}}$

تمرين 3 :

اجعل مقامات الخوارج الآتية اعدادا صحيحة

$$\frac{9}{\sqrt{10}+1}\ ,\ \frac{4}{3-\sqrt{15}}$$

$$\frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$$

الجواب :

لدينا :

$$\frac{9}{\sqrt{10}+1} = \frac{9(\sqrt{10}-1)}{(\sqrt{10}+1)(\sqrt{10}-1)}$$

$$= \frac{9(\sqrt{10}-1)}{9}$$

$$= \frac{\sqrt{10}-1}{1} = \sqrt{10} - 1$$

لدينا :

$$\frac{4}{3-\sqrt{15}} = \frac{4(3+\sqrt{15})}{(3-\sqrt{15})(3+\sqrt{15})}$$

$$= \frac{4(3+\sqrt{15})}{(9-15)}$$

$$= \frac{4(3+\sqrt{15})}{-6}$$

$$= \frac{-2(3+\sqrt{15})}{3}$$

لدينا :

$$\frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1(2+\sqrt{2})+1(2-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2})}{4-2}$$

$$= \frac{4}{2}$$

$$= \frac{2}{1} = 2$$

لدينا :

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-1^2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{5+2\sqrt{6}-1}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{4+2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2-\sqrt{6})}{(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2-\sqrt{6})}{4-6}$$

$$= -\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2-\sqrt{6})}{2}$$

تمرين 4 :

a و b عددان حقيقيان موجبان حيث $a > b$

بسط العدد A حيث :

$$A = \sqrt{a+b+2\sqrt{a\times b}} + \sqrt{a+b-2\sqrt{a\times b}}$$

الجواب :

لدينا :

$$a+b+2\sqrt{a\times b}$$

$$= \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + 2\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

$$= (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

ولدينا كذلك :

$$a+b-2\sqrt{a\times b} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$

إذن :

$$A = \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} + \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$$

وبما أن : $a > b$

فإن : $\sqrt{a} > \sqrt{b}$

ومنه :

$$A = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$= 2\sqrt{a}$$

$$\boxed{A = 2\sqrt{a}}$$



تمرين 5 :

نعتبر العددين

$a = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$ و $b = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$

1 - احسب $a.b$

2 - نضع $u = a + b$ و $v = a - b$

أ – ما هي اشارة كل من u و v

ب – احسب u^2 و v^2 واستنتج u و v

ج – استنتج كتابة مبسطة لـ a و b

الجواب :

$a.b = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}.\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$

$= \sqrt{(8 - 2\sqrt{15}).(8 + 2\sqrt{15})}$

$= \sqrt{8^2 - (2\sqrt{15})^2}$

$= \sqrt{64 - 60}$

$= \sqrt{4}$

إذن : $a.b = 2$

2 – أ – لدينا $a > 0$ و $b > 0$ إذن $u > 0$

لدينا : $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} > \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$

$b > a$

إذن : $a - b < 0$ إذن $v < 0$

ب –

$u^2 = (a + b)^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

$= 8 - 2\sqrt{15} + 2.2 + 8 + 2\sqrt{15}$

$= 20$

$u^2 = 20$

ومنه $u = \sqrt{20}$ لأن $u > 0$

أي أن

$\boxed{u = 2\sqrt{5}}$

لدينا : $v^2 = (a - b)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

$= 8 - 2\sqrt{15} - 2.2 + 8 + 2\sqrt{15}$

$= 12$

إذن $v = -\sqrt{12}$ لأن $v < 0$

ومنه $\boxed{v = -2\sqrt{3}}$

ج – لدينا

إذن $\begin{cases} u = a + b \\ v = a - b \end{cases}$

$u + v = 2a$

ومنه :

$a = \dfrac{u + v}{2}$

$a = \dfrac{2\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{a = \sqrt{5} - \sqrt{3}}$

لدينا : $u = a + b$

إذن $b = u - a$

$b = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} + \sqrt{3}$

$\boxed{b = \sqrt{5} + \sqrt{3}}$



تمرين 6 :

نعتبر العددين الحقيقين :

$a = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$ و $b = \sqrt{28 + 10\sqrt{3}}$

1 - احسب $(5 + \sqrt{3})^2$ و $(5 - \sqrt{3})^2$

ثم بسط a و b

بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي t يجب تحديده حيث :

$(14 + 5\sqrt{3})(5 - \sqrt{3})\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = t\sqrt{2}$

الجواب :

1 - أ

$(5 + \sqrt{3})^2 = 5^2 + 2.5\sqrt{3} + \sqrt{3}^2$

$= 25 + 10\sqrt{3} + 3$

$= 28 + 10\sqrt{3}$

لدينا

$(5 - \sqrt{3})^2 = 5^2 - 2.5\sqrt{3} + \sqrt{3}^2$

$= 25 - 10\sqrt{3} + 3$

$= 28 - 10\sqrt{3}$

$a = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$

$= \sqrt{(5 - \sqrt{3})^2}$

$= 5 - \sqrt{3}$

لأن : $5 > \sqrt{3}$

$\boxed{a = 5 - \sqrt{3}}$

لدينا : $b = \sqrt{28 + 10\sqrt{3}}$

$= \sqrt{(5 + \sqrt{3})^2}$

$= 5 + \sqrt{3}$

لأن : $5 + \sqrt{3} > 0$

$\boxed{b = 5 + \sqrt{3}}$

2 لدينا

$(\sqrt{14 + 5\sqrt{3}})^2 (5 - \sqrt{3}) (\sqrt{14 - 5\sqrt{3}})$

$(\sqrt{14 + 5\sqrt{3}})^2 . (\sqrt{14 - 5\sqrt{3}}).(5 - \sqrt{3})$

$= (\sqrt{14 + 5\sqrt{3}}).(\sqrt{(14 + 5\sqrt{3})(14 - 5\sqrt{3})}).(5 - \sqrt{3})$

$= (\sqrt{14 + 5\sqrt{3}}).(\sqrt{(196 - 75)}).(5 - \sqrt{3})$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{14 + 5\sqrt{3}} \times \sqrt{121}.(5 - \sqrt{3})$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{28 + 10\sqrt{3}} \times 11 \times (5 - \sqrt{3})$

$= \frac{11}{2}\sqrt{2} .(5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3})$

$= \frac{11}{2}.\sqrt{2} \times (25 - 3)$

$= \frac{11}{2}.\sqrt{2} \times (25 - 3)$

$= \frac{11}{2}.\sqrt{2} \times 22$

$= 121\sqrt{2}$

إذن : $(14 + 5\sqrt{3})(5 - \sqrt{3}).\sqrt{14 - 5\sqrt{3}}$

$= 121\sqrt{2}$

إذن $t = 121$

تمرين 7 :

أحسب ما يلي :

$$a = \left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$b = \left(-\frac{1}{8}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^6 \times \left(-\frac{5}{2}\right)^4$$

$$C = \left(\frac{5^3 \times 2^{-3}}{4 \times 25}\right)^2 \times \frac{2^8}{10^2 \times 5}$$

$$d = \frac{(3^2 \times 11^5)^{-2}}{(3^{-4} \times 11^3)^3} \times \frac{(33)^{15}}{3^2 \times 11}$$

الجواب :

$$a = \left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$= \frac{3^4}{5^4} \times \frac{1^3}{2^3} \times \frac{2^5}{3^5}$$

$$= \frac{3^4 \times 2^5}{5^4 \times 2^3 \times 3^5}$$

$$= \frac{3^4 \times 2^5 . 2^{-3} \times 3^{-5}}{5^4}$$

$$\boxed{a = \frac{2^2}{3.5^4}}$$

لدينا :

$$b = \left(-\frac{1}{8}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^6 \times \left(-\frac{5}{2}\right)^4$$

$$= \frac{(-1)^2}{8^2} \times \frac{2^6}{5^6} \times \frac{(-5)^4}{2^4}$$

$$= \frac{1}{(2^3)^2} \times \frac{2^6}{5^6} \times \frac{5^4}{2^4}$$

$$= \frac{1 \times 2^6 \times 5^4}{2^6 \times 5^6 \times 2^4}$$

$$= \frac{5^4 \times 2^6}{2^{10} \times 5^6}$$

$$= \frac{1}{2^{10} \times 5^6 \times 5^{-4} \times 2^{-6}}$$

$$\boxed{b = \frac{1}{2^4 \times 5^2}}$$

$$C = \left(\frac{5^3 \times 2^{-3}}{4 \times 25}\right)^2 \times \frac{2^8}{10^2 \times 5}$$

$$= \frac{(5^3)^2 \times (2^{-3})^2}{(2^2)^2 \times (5^2)^2} \times \frac{2^8}{(5 \times 2)^2 \times 5}$$

$$= \frac{5^6 \times 2^{-6} \times 2^8}{2^4 \times 5^4 \times 5^2 \times 2^2 \times 5^1}$$

$$= \frac{5^6 \times 2^2}{2^6 \times 5^7}$$

$$= \frac{1}{2^6 \times 5^7 \times 5^{-6} \times 2^{-2}}$$

$$= \frac{1}{2^4 \times 5^1}$$

$$\boxed{C = \frac{1}{5.2^4}}$$

لدينا :

$$d = \frac{(3^2 \times 11^5)^{-2}}{(3^{-4} \times 11^3)^3} \times \frac{(33)^{15}}{3^2 \times 11}$$

$$= \frac{(3^2)^{-2} \times (11^5)^{-2}}{(3^{-4})^3 \times (11^3)^3} \times \frac{(3 \times 11)^{15}}{3^2 \times 11^1}$$

$$= \frac{3^{-4} \times (11)^{-10} \times 3^{15} \times 11^{15}}{3^{-12} \times 11^9 \times 3^2 \times 11^1}$$

$$= \frac{3^{11} \times 11^5}{3^{-10} \times 11^{10}}$$



$$-\frac{3^{11}\times 3^{10}}{11^{10}\times 11^{-5}}$$

$$=\frac{3^{21}}{11^{5}}$$

إذن : $d=\frac{3^{21}}{(11)^{5}}$

تمرين 8 :

أ – بسط العدد :

$$A=\frac{a^{-3}\times b(a^{3}\times b^{-2})^{3}\times b^{6}}{b^{-3}\times a^{4}\times (a^{2}\times b)^{3}\times (a^{-3}\times b)^{2}}$$

ب – أحسب العدد A من أجل $a=10^{-2}$ و $b=10^{-3}$

2 – حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية m و n و k حيث :

$$2^{m}\times 3^{n}\times 5^{k}=21600$$

الجواب :

1 - أ

$$A=\frac{a^{-3}\times b(a^{3}\times b^{-2})^{3}\times b^{6}}{b^{-3}\times a^{4}\times (a^{2}\times b)^{3}\times (a^{-3}\times b)^{2}}$$

$$=\frac{a^{-3}\times b(a^{3})^{3}\times (b^{-2})^{3}\times b^{6}}{b^{-3}\times a^{4}\times (a^{2})^{3}\times b^{3}\times (a^{-3})^{2}\times b^{2}}$$

$$=\frac{a^{-3}.b^{1}\times a^{9}\times b^{-6}\times b^{6}}{b^{-3}\times a^{4}\times a^{6}\times b^{3}\times a^{-6}\times b^{2}}$$

$$=\frac{a^{6}\times b^{1}}{a^{4}\times b^{2}}$$

$$=\frac{a^{6}\times a^{-4}}{b^{2}\times b^{-1}}$$

إذن : $A=\frac{a^{2}}{b}$

ب – لدينا : $a=10^{-2}$ و $b=10^{-3}$

إذن : $A=\frac{a^{2}}{b}$

$$-\frac{(10^{-2})^{2}}{10^{-3}}$$

$$-\frac{10^{-4}}{10^{-3}}$$

$$A=10^{-4}\times 10^{3}$$

$$A=10^{-1}$$

$$A=\frac{1}{10}$$

$$\boxed{A=\frac{1}{10}}$$

2 لدينا :

$$2^{m}\times 3^{n}\times 5^{k}=21600$$

$$=216\times 100$$

$$=36\times 6\times 4\times 25$$

$$=6\times 6\times 6\times 4\times 25$$

$$=2\times 3\times 2\times 3\times 2\times 3\times 2^{2}\times 5^{2}$$

$$=2^{3}\times 3^{3}\times 2^{2}\times 5^{2}$$

$$=2^{5}\times 3^{3}\times 5^{2}$$

إذن : $m-5$

و $n-3$

$k=2$

تمرين 9 :

1 - بسط العدد :

$$A = \frac{(0,002)^4 \times 27000}{(0,0006)^3}$$

2 - استنتج حلول المعادلة

$$X^2 = \frac{(0,002)^4 \times 27000}{(0,0006)^3}$$

الجواب :

1 - لدينا :

$$A = \frac{(0,002)^4 \times 27000}{(0,0006)^3}$$

$$A = \frac{(2 \times 10^{-3})^4 \times 27 \times 10^3}{(6 \times 10^{-4})^3}$$

$$A = \frac{2^4 \times 10^{-12} \times 3^3 \times 10^3}{6^3 \times 10^{-12}}$$

$$A = \frac{2^4 \times 3^3 \times 10^{-12} \times 10^3 \times 10^{12}}{(2 \times 3)^3}$$

$$A = \frac{2^4 \times 3^3 \times 10^3}{2^3 \times 3^3}$$

$$A = 2^4 \times 2^{-3} \times 10^3$$

$$= 2^1 \times 10^3$$

$$A = 2 \times 10^3$$

إذن : $\boxed{A = 2 \times 10^3}$

2 - لدينا :

$$X^2 = \frac{(0,002)^4 \times 27000}{(0,0006)^3}$$

تكافئ :

$$X^2 = 2 . 10^3$$

أي $X^2 = 2000$

$X = \sqrt{2000}$ أو $X = -\sqrt{2000}$

إذن : $X = \sqrt{400 \times 5}$ أو $X = -\sqrt{400 \times 5}$

أي أن : $X = -20\sqrt{5}$ أو $X = 20\sqrt{5}$

إذن :

$$S = \left\{-20\sqrt{5} \, , \, 20\sqrt{5}\right\}$$

تمرين 10 :

1 - حدد ثلاثة أعداد حقيقية متناسبة $x \, ; \, y \, ; \, z$ مع $\frac{1}{2}$, 3 , $\frac{-5}{4}$ على التوالي.

2 - حدد العددين الحقيقين a و b علما أن :

$3a - 2b = 5$ و $5a = 3b$

الجواب :

x و y و z متناسبة مع $\frac{1}{2}$ و 3 و $\frac{-5}{4}$ هذا الترتيب

تعني أن :

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{3} = \frac{z}{\frac{-5}{4}}$$

أي أن : $2x = \frac{y}{3} = \frac{-4z}{5}$

إذن $y = 6x$

$-4z = 10\,x$



أي أن :

$$\begin{cases} y = 6x \\ z = \frac{-5}{2}x \end{cases}$$

نأخذ مثلا : $x = 2$

إذن : $y = 12$ و $z = -5$

إذن : $x = 2$ و $y = 12$ و $z = -5$

2 - لدينا : $5a = 3b$ إذن $a = \frac{3}{5}b$

وبما أن :

$$3a - 2b = 5$$

فإن :

$$3.\frac{3}{5} - 2b = 5$$

$$\frac{9}{5} - 2b = 5$$

$$\frac{9b - 10b}{5} = 5$$

$$-b = 25$$

$$\boxed{-b = 25}$$

إذن :

$$a = \frac{3}{5}(-25)$$

$$a = 3(-5)$$

$$\boxed{a = -15}$$

تمرين 11:

1 - حدد العدد الحقيقي x حيث الأعداد x, $\sqrt{2} - 2$, $\sqrt{3}$, $1 - \sqrt{2}$ متناسبة في هذا الترتيب

2 - a و b عددان سالبان متناسبان مع العددين 0,1 و 0,2 حيث : $a^2 + b^2 = 125$

حدد العددين a و b

الجواب :

x, $\sqrt{2} - 2$, $\sqrt{3}$, $1 - \sqrt{2}$ متناسبة في هذا الترتيب

يعني أن

$$\frac{x}{\sqrt{2} - 2} = \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{2}}$$

أي أن

$$(1 - \sqrt{2}).x = \sqrt{3}(\sqrt{2} - 2)$$

إذن

$$(1 - \sqrt{2}).x = -\sqrt{6}(1 - \sqrt{2})$$

إذن

$$x = \frac{-\sqrt{6}(1 - \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})}$$

إذن

$$x = -\sqrt{6}$$

a و b متناسبان مع العددين 0,1 و 0,2

تعني أن

$$\frac{a}{0,1} = \frac{b}{0,2}$$

$$a = \frac{0,1 \times b}{0,2}$$

$$a = \frac{b}{2}$$

إذن $b = 2a$

إذن $b^2 = 4a^2$

لدينا $a^2 + b^2 = 125$

إذن $a^2 + 4a^2 = 125$

$$5a^2 = 125$$

إذن $a^2 = 25$

$a = 5$ أو $a = -5$

وبما أن $a < 0$ فإن $\boxed{a = -5}$

لدينا $b = 2a$



إذن $b = 2(-5)$

ومنه $\boxed{b = -10}$

تمرين 12:

a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية متناسبة مع 1, 2 و 3 على التوالي حيث :

$$a^2 + b + 2 \times (c + 8) = 0$$

حدد الأعداد a و b و c

الجواب :

a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية متناسبة مع 1, 2 و 3 على التوالي.

تعني أن : $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$

إذن $b = 2a$

$c = 3a$

لدينا $a^2 + b + 2(c + 8) = 0$

$a^2 + 2a + 2(3a + 8) = 0$

أي أن $a^2 + 2a + 6a + 16 = 0$

إذن $a^2 + 8a + 16 = 0$

أي أن $(a + 4)^2 = 0$

إذن $a + 4 = 0$

أي أن $a = -4$

ومنه $c = -12$ و $b = -8$

إذن $a = -4$ و $b = -8$ و $c = -12$

تمرين 13:

انشر واختصر

* $(\frac{1}{2}a + 4)^2$ * $(5a - 2b)^2$

* $(2a + b)^2 - (2a - b)^2$

* $(a + 2b)^3 - (a - 2b)^3$

* $(a - b + c)^2$

الجواب :

$$(5a - 2b)^2 = (5a)^2 - 2(5a)\times(2b) + (2b)^2$$
$$= 25a^2 - 20\,ab + 4b^2$$

إذن $(5a - 2b)^2 = 25a^2 + 4b^2 - 20\,ab$

$$(\frac{1}{2}a + 4)^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + 2.(\frac{1}{2}a) \times 4 + 4^2$$
$$= (\frac{1}{4}a)^2 + 4a + 16$$

إذن $(\frac{1}{2}a + 4)^2 = \frac{a^2}{4} + 4a + 16$

لدينا $(2a + b)^2 - (2a - b)^2$

$= 4a^2 + 2.(2a).b + b^2 - (4a^2 - 2(2a).b + b^2)$

$= 4a^2 + 4ab + b^2 - 4a^2 + 4ab - b^2$

$= 4ab + 4ab$

$= 8a.b$

إذن $(2a + b)^2 - (2a - b)^2 = 8a.b$

لدينا



$(a + 2b)^3 = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$

$(a - 2b)^3 = a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$

إذن $(2a + b)^2 - (2a - b)^2$

$= a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3 - a^3 + 6a^2b$

$-12ab^2 + 8b^3$

$= 12a^2b + 16b^3$

$= 16 b^3 + 12 a^2b$

لدينا

$(a - b + c)^2$

$= [(a - b) + c]^2$

$= (a - b)^2 + 2(a - b).c + c^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

تمرين 14:

عمل ما يلي :

$A = 2(x - 1)^2 - 3(x - 1)$

$B = x(2x - 3) + 3 - 2x$

$C = (4x^2 - 25) + 4x - 10$

$D = x^2(x - 2) - x^3 + 8$

$E = 27x^3 + 64 - 16(3x + 4)$

الجواب :

$A = 2(x - 1)^2 - 3(x - 1)$

$= 2(x - 1) \times (x - 1) - 3(x - 1)$

$= (x - 1) [2(x - 1) - 3]$

$= (x - 1) [2x - 2 - 3]$

$= (x - 1)(2x - 5)$

إذن $\boxed{A = (x - 1)(2x - 5)}$

لدينا $B = x(2x - 3) + 3 - 2x$

$= x(2x - 3) - 1(2x - 3)$

$= (2x - 3)(x - 1)$

إذن $\boxed{B = (2x - 3)(x - 1)}$

لدينا $C = (4x^2 - 25) + 4x - 10$

$= (2x)^2 - 5^2 + 2(2x - 5)$

$= (2x - 5)(2x + 5) + 2(2x - 5)$

$= (2x - 5)(2x + 5 + 2)$

$= (2x - 5)(2x + 7)$

إذن $\boxed{C = (2x - 5)(2x + 7)}$

$D = x^2(x - 2) - x^3 + 8$

$= x^2(x - 2) - (x^3 - 8)$

$= x^2(x - 2) - (x^3 - 2^3)$

$= x^2(x - 2) - (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

$= (x - 2)(x^2 - x^2 - 2x - 4)$

$= (x - 2)(-2x - 4)$

$= -2(x - 2)(x + 2)$

$\boxed{D = -2(x - 2)(x + 2)}$

$E = 27x^3 + 64 - 16(3x + 4)$

$= (3x)^3 + 4^3 - 16(3x + 4)$

$= (3x + 4)(9x^2 + 12x + 16 - 16)$

$= (3x + 4)(9x^2 + 12x)$

$= (3x + 4) \times 3x\,(3x + 4)$

$= 3x.(3x + 4) \times (3x + 4)$

$= 3x.(3x + 4)^2$

تمرين 15:

عمل ما يلي :

$A = (3x + 1)^2 - 49$

$B = x^3 + 3x^2 - 27 - 9$

$C = 9x^2 - 1 + (3x - 1)^2$

$D = (2x - 3)^3 - x^3 - 9(x - 3)$

$E = x^4 + 4$

$F = 9\,x^2.y^3 - 3\,x.y^2 - 6\,x^3y^3 + 18\,xy$

الجواب :

لدينا $A = (3x + 1)^2 - 49$

$= (3x + 1)^2 - 7^2$

$= (3x + 1 - 7).(3x + 1 + 7)$

$= (3x - 6).(3x + 8)$

إذن $\boxed{A = (3x - 6).(3x + 8)}$

لدينا $B = x^3 + 3x^2 - 27 - 9$

$= x^2(x + 3) - 9(3 + x)$

$= (x + 3)(x - 3)(x + 3)$

$= (x + 3)^2.(x - 3)$

إذن $\boxed{B = (x + 3)(x - 3)^2}$

لدينا $C = 9x^2 - 1 + (3x - 1)^2$

$= (3x)^2 - 1^2 + (3x - 1)^2$

$= (3x - 1)(3x + 1) + (3x - 1)(3x - 1)$

$= (3x - 1)(3x + 1 + 3x - 1)$

$= (3x - 1)(6x)$

$= 6x.(3x - 1)$

إذن $\boxed{C = 6x.(3x - 1)}$

لدينا $D = (2x - 3)^3 - x^3 - 9(x - 3)$

$= [(2x - 3)^3 - x^3] - 9(x - 3)$

$= (2x - 3 - x)[(2x - 3)^2 + x(2x - 3) + x^2] - 9(x - 3)$

$= (x - 3)(4x^2 - 12x + 9 + 2x^2 - 3x + x^2) - 9(x - 3)$

$= (x - 3)(7x^2 - 15x + 9) - 9(x - 3)$

$= (x - 3)(7x^2 - 15x + 9 - 9)$

$= (x - 3)(7x^2 - 15x)$

$= x \times (x - 3) \times (7x - 15)$

إذن $\boxed{D = x.(x - 3) \times (7x - 15)}$

لدينا $E = x^4 + 4$

$= (x^2)^2 + 2^2$

$= (x^2)^2 + 2^2 + 4x^2 - 4x^2$

$= (x^2)^2 + 2.2.x^2 + 2^2 - 4x^2$

$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$

$= (x^2 + 2 - 2x)^2(x^2 + 2 + 2x)$

$= (x^2 - 2 + 2x)^2(x^2 + 2 + 2x)$

إذن $\boxed{E = (x^2 - 2 + 2x)^2(x^2 + 2 + 2x)}$

$F = 9x^2.y^3 - 3\,x.y^2 - 6x^3y^3 + 18xy$

$= 3xy(3xy^2 - x^3y - 2x^2.y^2 + 6)$

تمرين 16:

عمل ما يلي :

$A = (8x + 1)^2 - 9 - 3(4x - 1)$

$B = x^3 + 3x^2 + 15 + 5x$

$C = x^2 + 4x + 3$

$D = x^4 + 64$

$E = 4x^2 - 9y^2 - 21y + 14x$

الجواب :

لدينا $A = (8x + 1)^2 - 9 - 3(4x - 1)$

$= (8x + 1)^2 - 3^2 - 3(4x - 1)$

$= (8x + 1 - 3)(8x + 1 + 3) - 3(4x - 1)$

$= (8x - 2)(8x + 4) - 3(4x - 1)$

$= 2(4x - 1)(8x + 4) - 3(4x - 1)$

$= (4x - 1)(16x + 8) - 3(4x - 1)$

$= (4x - 1)(16x + 8 - 3)$

$= (4x - 1)(16x + 5)$

إذن $\boxed{A = (4x - 1)(16x + 5)}$

لدينا $B = x^3 + 3x^2 + 15 + 5x$

$= x^2 \times (x + 3) + 5\,(x + 3)$

$= (x + 3) \times (x^2 + 5)$

إذن $\boxed{B = (x + 3) \times (x^2 + 5)}$

لدينا $C = x^2 + 4x + 3$

$= x^2 + 4x + 4 - 1$

$= (x + 2)^2 - 1^2$

$= (x + 2 - 1).(x + 2 + 1)$

$= (x + 1).(x + 3)$

إذن $\boxed{C = (x + 1)(x + 3)}$

لدينا $D = x^4 + 64$

$= (x^2)^2 + 8^2$

$= (x^2)^2 + 2 \times 8.x^2 - 2 \times 8.x^2 + 8^2$

$= (x^2)^2 + 2.8.x^2 + 8^2 - 16x^2$

$= (x^2 + 8)^2 - (4x)^2$

$= (x^2 + 8 - 4x)^2 - (x^2 + 8 + 4x)$

$= (x^2 - 4x + 8)^2\,(x^2 + 4x + 8)$

إذن $\boxed{D = (x^2 - 4x + 8)^2(x^2 + 4x + 8)}$

لدينا $E = 4x^2 - 9y^2 - 21y + 14x$

$= (2x)^2 - (3y)^2 - 7(3y - 2x)$

$= (2x - 3y) \times (2x + 3y) + 7(2x - 3y)$

$= (2x - 3y) \times (2x + 3y + 7)$

إذن $\boxed{E = (2x - 3y) \times (2x + 3y + 7)}$

تمرين 17:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$\frac{x-1}{2} - \frac{1-3x}{6} = x - \frac{1}{3}$$

$$x + \frac{5}{12} - \frac{2x-1}{3} = \frac{x}{3} + \frac{3}{4}$$

$$2x - 3 + \frac{x-1}{2} = 1 - \frac{2x-3}{3}$$

$$2(x-1) = (1+x).\sqrt{3}$$

$$x + \frac{x^2-2}{x+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

الجواب :

لدينا $\frac{x-1}{2} - \frac{1-3x}{6} = x - \frac{1}{3}$

أي أن $\frac{3(x-1)}{6} - \frac{1-3x}{6} = \frac{6x}{6} - \frac{2}{6}$

إذن $\frac{3(x-1)-(1-3x)}{6} = \frac{6x-2}{6}$

أي أن $3(x-1) - (1-3x) = 6x - 2$

$3x - 3 - 1 + 3x = 6x - 2$

إذن $6x - 4 = 6x - 2$

$6x - 6x = -2 + 4$

$0 = 2$

إذن $S = \phi$

لدينا $x + \frac{5}{12} - \frac{2x-1}{3} = \frac{x}{3} + \frac{3}{4}$

أي أن $\frac{12x}{12} + \frac{5}{12} - \frac{4(2x-1)}{12} = \frac{4x}{12} + \frac{9}{12}$

أي أن $\frac{12x + 5 - 4(2x-1)}{12} = \frac{4x+9}{12}$

أي أن $12x + 5 - 8x + 4 = 4x + 9$

$4x + 9 = 4x + 9$

$4x - 4x = 9 - 9$

$0x = 0$

إذن $S = \mathbb{R}$

لدينا $2x - 3 + \frac{x-1}{2} = 1 - \frac{2x-3}{3}$

$\frac{6(2x-3)}{6} + \frac{3(x-1)}{6} = \frac{6}{6} - \frac{2(2x-3)}{3}$

$6(2x-3) + 3(x-1) = 6 - 2(2x-3)$

$12x - 18 + 3x - 3 = 6 - 4x + 6$

$15x - 21 = 12 - 4x$

$15x - 4x = 12 - 21$

$19x = 33$

$x = \frac{33}{19}$

إذن $S = \left\{\frac{33}{19}\right\}$

لدينا $2(x-1) = (1+x).\sqrt{3}$

$2x - 2 = \sqrt{3} + x\sqrt{3}$

$2x - x\sqrt{3} = \sqrt{3} + 2$

$(2-\sqrt{3}).x = 2 + \sqrt{3}$

$x = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

$x = \frac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$





$$x = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}$$

$$x = (2+\sqrt{3})^2$$

إذن $S = \left\{(2+\sqrt{3})^2\right\}$

$(E): \quad x + \frac{x^2-2}{x+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$D_E = \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2}\}$

(E) تكافئ

$$x + \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$x + x - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$2x = 2\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2}$$

وبما أن $\sqrt{2} \notin DE$ فإن

$$S = \phi$$

تمرين 18:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

* $\frac{13}{2x-1} = \frac{-7}{4}$
* $(x-3)(2x-1)+2(x^2-9) = (x-3)^2$
* $(x-3)(2x+5)^2 = (x+5)(2x-3)^2$
* $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$
* $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 = 0$

الجواب :

نعتبر

$(E): \frac{13}{2x-1} = \frac{-7}{4}$

$\sqrt{3}$

لدينا $D_E = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

لدينا (E) تكافئ $13 \times 4 = -7(2x-1)$

أي أن $52 = -14x + 7$

أي أن $14x = 7 - 52$

$14x = -45$

$x = -\frac{45}{14}$

إذن $S = \left\{-\frac{45}{14}\right\}$

لدينا $(x-3)(2x-1)+2(x^2-9) = (x-3)^2$

يعني :

$(x-3)(2x-1)+2(x-3)(x+3)-(x-3)^2=0$

أي أن

$(x-3)(2x-1)+(x-3)(2x+6)-(x-3)$

$(x-3)=0$

$(x-3)(2x-1+2x+6-x+3)=0$

أي أن $(x-3)(3x+8)=0$

أي أن $3x+8=0$ أو $x-3=0$

إذن $x = \frac{-8}{3}$ أو $x = 3$

ومنه $S = \left\{3 , \frac{-8}{3}\right\}$

لدينا $(x-3)(2x+5)^2 = (x+5)(2x-3)^2$

يعني

$(x - 3)(4x^2 + 20x + 25) = (x + 5)(4x^2$
$-12x + 9)$

تكافئ

$4x^3 + 8x^2 - 35x - 75 = 4x^3 + 8x^2 - 51x + 45$

أي أن

$-35x - 75 = - 51x + 45$

$-35x + 51x = 75 + 45$

$16x = 120$

$x = \frac{120}{16}$

أي أن $x = \frac{15}{2}$

ومنه $S = \left\{\frac{15}{2}\right\}$

نعتبر

$(E)\ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x\ \ 2} + \frac{1}{x+2}$

لدينا $D_E = \mathbb{R}\ \{1 , 1 , -2 , 2\}$

(E) تكافئ

$\frac{x - 1 + x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x + 2 - x - 1}{x^2 - 4}$

أي أن $\frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{2x}{x^2 - 4}$

$2x(x^2 - 4) = 2x(x^2 - 1)$

أي أن $x(x^2 - 4) = x(x^2 - 1)$

$x^3 - 4x = x^3\ \ x$

أي أن $x^3\ \ x^3\ \ 4x + x = 0$

$-3x = 0$

أي أن $x = 0$

وبما أن $0 \in D_E$ فإن $S = \{0\}$

نعتبر $(E''): \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 = 0$

$D_{E''} = \mathbb{R}\ \{1 , -2\}$

$(E'')\ \left(\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+2}\right)\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+2}\right) = 0$

أي أن $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+2} = 0$

أو

$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+2} = 0$

أي أن

$\frac{(x + 1)(x + 2) + (x - 1)(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} = 0$

أو

$\frac{(x + 1)(x + 2) - (x - 1)(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} = 0$

تكافئ $x + 1)(x + 2) + (x - 1)^2 = 0)$

أو

$(x + 1)(x + 2) - (x - 1)^2 = 0$

تكافئ $5x + 1 = 0$ أو $2x^2 + x + 3 = 0$

$5x = -1$ أو $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$

$x = -\frac{1}{5}$ أو $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16} = 0$

$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{23}{16}$ لا يمكن

إذن $S = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$

تمرين 19:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

* $4x^2 - 81 + (x - 3)(2x + 9) = 0$
* $(3 - 2x)^2 - (2x - 3)(4x - 5) = 0$



* $\frac{8x^3 - 2x}{1 + 2x} = 0$
* $\frac{x^2 - 1}{3x} = 1 + x$

الجواب :

لدينا $4x^2 - 81 + (x - 3)(2x + 9) = 0$

أي أن $(2x)^2 - 9^2 + (x - 3)(2x + 9) = 0$

أي $(2x - 9)(2x + 9) + (x - 3)(2x + 9) = 0$

تكافئ $(2x + 9)(2x - 9 + x - 3) = 0$

يعني : $(2x + 9)(3x - 12) = 0$

أي أن $3x - 12 = 0$ أو $2x + 9 = 0$

يعني $3x = 12$ أو $2x = -9$

يعني $x = 4$ أو $x = -\frac{9}{2}$

إذن $S = \left\{-\frac{9}{2} , 4\right\}$

لدينا $(3 - 2x)^2 - (2x - 3)(4x - 5) = 0$

تكافئ $(2x - 3)^2 - (2x - 3)(4x - 5) = 0$

تكافئ $(2x - 3)(2x - 3 - 4x + 5) = 0$

يعني $(2x - 3)(-2x + 2) = 0$

يعني $-2x + 2 = 0$ أو $2x - 3 = 0$

يعني $-2x = 2$ أو $2x = 3$

يعني $x = 1$ أو $x = \frac{3}{2}$

إذن $S = \left\{1 , \frac{3}{2}\right\}$

نعتبر $\frac{8x^3 - 2x}{1 + 2x} = 0$

$D_E = \mathbb{R} - \left\{1 , \frac{-1}{2}\right\}$

(E) تكافئ $8x^3 - 2x = 0$

أي أن $2x(4x^2 - 1) = 0$

أي أن $2x(2x - 1)(2x + 1) = 0$

يعني أن

$2x + 1 = 0$ أو $2x - 1 = 0$ أو $2x = 0$

أي أن $x = -\frac{1}{2}$ أو $x = \frac{1}{2}$ أو $x = 0$

وبما أن $-\frac{1}{2} \notin D_E$

فإن $S = \left\{0 , \frac{1}{2}\right\}$

لدينا $(E') \quad \frac{x^2 - 1}{3x} = 1 + x$

لدينا $D_{E'} = \mathbb{R}^*$

(E') تكافئ $x^2 - 1 = 3x(x + 1)$

تكافئ $(x + 1)(x - 1) = 3x(x + 1)$

يعني $(x + 1)(x - 1 - 3x) = 0$

يعني $(x + 1)(-2x - 1) = 0$

يعني $-2x - 1 = 0$ أو $x + 1 = 0$

يعني $x = -\frac{1}{2}$ أو $x = -1$

$S = \left\{-1 , -\frac{1}{2}\right\}$

تمرين 20:

حل في المجموعة $\mathbb{Z}$:

* $3^{4x+2} = 27 \times 3^{2x+3}$
* $\frac{5^n}{75} = \frac{5}{3 \times 5^{2n}}$
* $2^{x+4} + 2^x + 2^{x+3} = 200$

الجواب :

لدينا $3^{4x+2} = 27 \times 3^{2x+3}$

$3^{4x+2} = 3^{3} \times 3^{2x+3}$

أي أن $3^{4x+2} = 3^{3+2x+3}$

تكافئ $3^{4x+2} = 3^{2x+6}$

أي أن $4x + 2 = 2x + 6$

$4x - 2x = 6 - 2$

يعني $2x = 4$

يعني $x = 2$

وبما أن $2 \in \mathbb{Z}$ فإن

$S = \{2\}$

لدينا $\frac{5^{x}}{75} = \frac{5}{3 \times 5^{2x}}$

تكافئ $5^{x} \times 3 \times 5^{2x} = 75 \times 5$

تكافئ $5^{3x} \times 3 = 3 \times 25 \times 5$

تكافئ $5^{3x} = 5^{2} \times 5^{1}$

تكافئ $5^{3x} = 5^{3}$

أي أن $3x = 3$

يعني $x = 1$

وبما أن $1 \in \mathbb{Z}$ فإن

$S = \{1\}$

لدينا $2^{x+4} + 2^{x} + 2^{x+3} = 200$

يعني $2^{4} . 2^{x} + 2^{x} + 2^{3} . 2^{x} = 200$

يعني $2^{x}(2^{4} + 1 + 2^{3}) = 200$

يعني $(16 + 1 + 8).2^{x} = 200$

يعني $25.2^{x} = 200$

يعني $2^{x} = \frac{200}{25}$

يعني $2^{x} = 8$

يعني $2^{x} = 2^{3}$

إذن $x = 3$

ومنه $S = \{3\}$ لأن $3 \in \mathbb{Z}$

تمرين 21:

نعتبر المعادلة :

$(E) : 2(m - x) + 5x.m = m + 3x$

حيث m بارامتر حقيقي.

1 - حل المعادلة (E) من أجل $m = \frac{3}{5}$

2 - حدد قيمة العدد الحقيقي m إذا كانت (E) تقبل حلا يساوي (1-)

3 - حل وناقش المعادلة (E) حسب قيم البارمتر m

الجواب :

لدينا $m = \frac{3}{5}$

(E) تصبح

$2(\frac{3}{5} - x) + 5.x.\frac{3}{5} = \frac{3}{5} + 3x$

يعني $\frac{6}{5} - 2x + 3x = \frac{3}{5} + 3x$





يعني $-2x + 3x - 3x = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}$

يعني $-2x = -\frac{3}{5}$

يعني $x = \frac{3}{10}$

إذن $S = \left\{\frac{3}{10}\right\}$

لدينا (-1) حلا للمعادلة (E)

تعني أن :

$2(m + 1) - 5m = m - 3$

يعني $2m + 2 - 5m = m - 3$

يعني $-3m + 2 = m - 3$

يعني $-3m - m = -3 - 2$

يعني $-3m = -5$

أي $m = \frac{5}{4}$

(E) تكافئ

$2m - 2x + 5x.m = m + 3x$

تكافئ $-2x + 5x.m - 3x = m - 2m$

تكافئ $5x.m - 5x = -m$

يعني $(5m - 5).x = -m$

يعني $5(m - 1).x = -m$

إذا كانت $m - 1 \neq 0$ أي أن $m \neq 1$

فإن $x = \frac{-m}{5(m-1)}$

$x = \frac{m}{5(1-m)}$

إذن $S = \left\{\frac{m}{5(1-m)}\right\}$

إذاكان $m - 1 = 0$ أي $m = 1$

فإن المعادلة تكافئ $x0 = -1$

يعني $0 = -1$

وهذا غير ممكن إذن $S = \phi$

تمرين 22:

نعتبر المعادلة

$$\frac{1}{x-1} = \frac{m^2}{mx-1}$$

حيث m عدد حقيقي

1 - حدد حسب قيم m مجموعة التعريف

2 - أ - حل المعادلة إذا كان $m = 0$

ب - حل المعادلة إذا كان $m = 1$

3 - حل المعادلة إذاكان $m \neq 0$ أو $m \neq 1$

الجواب :

1 - مجموعة تعريف (E) إذا كانت $m = 0$ فإن

(E) تصبح $\frac{1}{x-1} = 0$

إذن $D_E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

إذا كانت $m \neq 0$ فإن

$D_E = \mathbb{R} \setminus \left\{1 , \frac{1}{m}\right\}$

2 - أ - $m = 0$ إذن (E) تصبح $\frac{1}{x-1} = 0$

أي أن $1 = 0 \times (x-1)$

$1 = 0$

$S = \phi$



ب - $m = 1$ فإن (E) تكافئ $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

أي أن $x - 1 = x - 1$

أي أن $x - x = -1 + 1$

$0x = 0$

إذن $S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

3 - إذا كانت $m \neq 0$ و $m \neq 1$ فإن (E)

تكافئ $mx - 1 = m^2.x - m^2$

$mx - m^2x = -m^2 + 1$

أي أن $m^2x - mx = m^2 - 1$

$(m^2 - m).x = m^2 - 1$

أي أن $m(m-1)x = (m-1)(m+1)$

وبما أن $m \neq 0$ و $m \neq 1$

فإن $m(m-1) \neq 0$

ومنه $x = \frac{(m-1)(m+1)}{m(m-1)}$

إذن $x = \frac{(m+1)}{m}$

إذن $S = \left\{ \frac{(m+1)}{m} \right\}$

تمرين 23:

أنجز القسمة الاقليدية لـ $P(x)$ على $x - \alpha$ في كل حالة :

1 - $P(x) = 3x^2 - 4x - 15 \quad ; \alpha = 3$

2 - $P(x) = 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 6 \quad ; \alpha = -1$

3 - $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 36 \quad ; \alpha = -2$

4 - $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3 \quad ; \alpha = -\frac{3}{2}$

الجواب :

1- نعتبر الموضعة التالية :

$$\begin{array}{rr|l} 3x^2 - 4x - 15 & & x - 3 \\ \cline{3-3} -3x^2 + 9x & & 3x + 5 \\ \cline{1-1} 0 \quad 5x - 15 & & \\ -5x + 15 & & \\ \cline{1-1} 0 \quad 0 & & \end{array}$$

إذن $3x^2 - 4x - 15 = (x - 3)(3x + 5)$

2 - نعتبر الموضعة التالية :

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 6 & x + 1 \\ \cline{2-2} -3x^4 - 3x^3 & 3x^3 - x^2 + 6x - 6 \\ \cline{1-1} 0 \quad -x^3 + 5x^2 - 6 & \\ +x^3 + x^2 & \\ \cline{1-1} 0 \quad 6x^2 - 6 & \\ -6x^2 - 6x & \\ \cline{1-1} 0 \quad -6x - 6 & \\ +6x + 6 & \\ \cline{1-1} 0 + 0 & \end{array}$$

إذن : $P(x) = (x + 1)(3x^3 - x^2 + 6x - 6)$

3 - نعتبر الموضعة التالية :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 4x^2 + 2x - 36 & x + 2 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 4x^2 & 2x^2 - 8x + 18 \\ \cline{1-1} 0 \quad -8x^2 + 2x - 36 & \\ +8x^2 + 16x & \\ \cline{1-1} 0 \quad 18x - 36 & \\ -18x - 36 & \\ \cline{1-1} -72 & \end{array}$$



إذن :

$$P(x) = (x + 2)(2x^2 - 8x + 18) - 72$$

4 - نعتبر الموضعة التالية :

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^3 & -x^2 - 4x + 3 & & x + \frac{3}{2} \\ \hline -2x^3 & -3x^2 & & 2x^2 - 4x + 2 \\ \hline 0 & -4x^2 - 4x + 3 & & \\ & +4x^2 + 6x & & \\ \hline & 0 \quad 2x + 3 & & \\ & -2x - 3 & & \\ \hline & 0 & & \end{array}$$

إذن :

$$P(x) = (x + \frac{3}{2})(2x^2 - 4x + 2)$$
$$= 2(x + \frac{3}{2})(x^2 - 2x + 1)$$
$$= (2x + 3)(x - 1)^2$$

تمرين 24:

1) نعتبر الحدودية

$$P(x) = (x^3 + 2x^2 - 3x)$$

- حسب $P(-3)$ ثم استنتج تعميلا
- لـ $P(x)$ عوامله حدوديات من الدرجة الأولى

نعتبر الحدودية

$$P(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$$

أ – أحسب $P(3)$

ب – استنتج تعميلا لـ $P(x)$ تكون عوامله حدوديات من الدرجة الأولى.

الجواب :

1 - لدينا $P(-3) = (-3)^3 + 2(-3)^2 - 3(-3)$

$$= -27 + 18 + 9$$
$$= -27 + 27$$

إذن : $P(-3) = 0$

لدينا $P(-3) = 0$ إذن $P(x)$ يقبل القسمة على $(x + 3)$

نعتبر الموضعة التالية :

$$\begin{array}{rr|l} x^3 + 2x^2 - 3x & & x + 3 \\ \hline -x^2 - 3x^2 & & x^2 - x \\ \hline 0 \quad -x^2 - 3x & & \\ +x^2 + 3x & & \\ \hline 0 \quad 0 & & \end{array}$$

إذن : $P(x) = (x + 3)(x^2 - x)$

$$= (x + 3)x.(x - 1)$$

ومنه $\boxed{P(x) = x.(x - 1)(x + 3)}$

2 - لدينا

أ – $P(3) = 3^3 + 3^2 - 8.3 - 12$

$$= 27 + 9 - 24 - 12$$
$$= 36 - 36$$
$$= 0$$

إذن $P(3) = 0$



ب – لدينا $P(3) = 0$ إذن $P(x)$ تقبل القسمة على $x - 3$

نعتبر الموضعة التالية :

$x^3 + x^2 - 8x - 12$	$x - 3$
$-x^3 + 3x^2$	$x^2 + 4x + 4$
$0 \quad 4x^2 - 8x - 12$	
$-4x^2 + 12x$	
$0 \quad 4x - 12$	
$-4x + 12$	
0	

إذن $P(x) = (x - 3)(x^2 - 4x + 4)$

$= (x - 3)(x + 2)^2$

$$P(x) = (x - 3)(x + 2)(x + 2)$$

تمرين 25:

نعتبر الحدودية التالية :

$$P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$$

1 – أ – بين أن 3 جذر للحدودية $P(x)$

ب – حدد الحدودية $Q(x)$ حيث

$$P(x) = (x - 3)Q(x)$$

ج – بين أن $Q(x) = (x + 2)(x - 4)$

د – استنتج تعميلا لـ $P(x)$

2 – حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين

أ – $P(x^2) = 0$

ب – $P(\sqrt{x}) = 0$

الجواب :

$$P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$$

1 – أ – لدينا

$P(3) = 3^3 - 5.3^2 - 2.3x + 24$

$= 27 - 45 - 6 + 24$

$= 51 - 51$

$= 0$

إذن 3 جذر للحدودية $P(x)$

ب – نعتبر الموضعة التالية :

$x^3 - 5x^2 - 2x + 24$	$x - 3$
$-x^3 + 3x^2$	$x^2 - 2x - 8$
$0 \quad -2x^2 - 2x + 24$	
$+2x^2 - 6x$	
$0 \quad -8x + 24$	
$+8x - 24$	
$0 \quad 0$	

إذن $P(3) = (x - 3)(x^2 - 2x - 8)$

إذن $Q(x) = x^2 - 2x - 8$

ج – لدينا $(x + 2)(x - 4) =$

$= x^2 - 4x + 2x - 8$

$= x^2 - 2x - 8 = Q(x)$





تمرين 26:

نعتبر الحدودية

$$P(x) = x^3 + 2ax^2 + bx + 4b$$

1 – حدد العددين الحقيقيين a و b إذا علمت أن $P(x)$ تقبل القسمة على $(x - 1)$ و $(x + 1)$

2 – أكتب $P(x)$ على شكل جداء حدوديات درجتها 1

3 – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة

$$P(x) = 3 - 3x^2$$

الجواب :

لدينا $P(x)$ تقبل القسمة على $(x - 1)$ و $(x + 1)$

تعني أن $P(1) = 0$ و $P(-1) = 0$

أي أن $\begin{cases} 1 + 2a + b + 4b = 0 \\ -1 + 2a - b + 4b = 0 \end{cases}$

أي أن $\begin{cases} 2a + 5b = -1 \\ 2a + 3b = 1 \end{cases}$

إذن $(2a + 5b) - (2a + 3b) = -2$

إذن $2b = -2$

ومنه $b = -1$

لدينا $2a + 5b = -1$ إذن $2a - 5 = -1$

أي أن $2a = 4$

إذن $\boxed{a = 2}$ و $\boxed{b = -1}$

2 - لدينا $P(x) = x^3 + 2ax^2 + bx + 4b$

إذن $Q(x) = (x + 2)(x - 4)$

و $P(x) = (x - 3).Q(x)$

$= (x - 3)(x + 2)(x - 4)$

إذن $P(x) = (x + 2)(x - 3)(x - 4)$

2 - أ – $P(x^2) = 0$

تكافئ $(x^2 + 2)(x^2 - 3)(x^2 - 4) = 0$

أي أن

$x^2 + 2 = 0$ أو $x^2 - 3 = 0$ أو $x^2 - 4 = 0$

إذن $x^2 = -2$ أو $x^2 = 3$ أو $x^2 = 4$
لا يمكن

أي أن $x^2 = 3$ أو $x^2 = 4$

يعني أن $x = \sqrt{3}$ أو $x = -\sqrt{3}$

أو $x = \sqrt{4}$ أو $x = -\sqrt{4}$

$x = \sqrt{3}$ أو $x = -\sqrt{3}$ أو $x = 2$ أو $x = -2$

إذن $S = \{-2 , 2 , \sqrt{3} , -\sqrt{3}\}$

ب – $P(\sqrt{x}) = 0$

يعني أن $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 4) = 0$

$\sqrt{x} + 2 = 0$ أو $\sqrt{x} - 3 = 0$ أو $\sqrt{x} - 4 = 0$

أي أن

$\sqrt{x} = -2$ أو $\sqrt{x} = 3$ أو $\sqrt{x} = 4$
لا يمكن

إذن $\sqrt{x}^2 = 3^2$ أو $\sqrt{x}^2 = 4^2$

أي أن $x = 9$ أو $x = 16$

ومنه $S = \{9 , 16\}$



$P(x)$ تقبل القسمة على $x - 1$

نعتبر الموضعة التالية :

$$\begin{array}{rl|l} x^3 + 4x^2 - x - 4 & & x - 1 \\ \cline{3-3} -x^3 + x^2 & & x^2 + 5x + 4 \\ \cline{1-1} 0 \quad 5x^2 - x - 4 & & \\ -5x^2 + 5x & & \\ \cline{1-1} 0 \quad 4x - 4 & & \\ -4x + 4 & & \\ \cline{1-1} 0 & & \end{array}$$

إذن

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + 5x + 4)$$

نعتبر الموضعة التالية :

$$\begin{array}{rl|l} x^2 + 5x + 4 & & x + 1 \\ \cline{3-3} -x^2 - x & & x + 4 \\ \cline{1-1} 0 \quad 4x + 4 & & \\ -4x - 4 & & \\ \cline{1-1} 0 & & \end{array}$$

إذن $x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$

$$\boxed{P(x) = (x \quad 1)(x + 1)(x + 4)}$$

3 - لدينا $P(x) = 3 - 3x^2$

تكافئ :

$(x \quad 1)(x + 1)(x + 4) = -3(-1 + x^2)$

تكافئ $(x^2 \quad 1)(x + 4) + 3(x^2 \quad 1) = 0$

أي أن $(x^2 - 1)(x + 4 + 3) = 0$

إذن $(x - 1)(x + 1)(x + 7) = 0$

ومنه $x + 7 = 0$ أو $x + 1 = 0$ أو $x - 1 = 0$

أي أن $x = -7$ أو $x = -1$ أو $x = 1$

إذن $S = \{-1 , 1 , -7\}$

تمرين 27:

نعتبر الحدودية

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

1 - احسب $P(2)$ ماذا تستنتج ؟

2 - حدد الأعداد الحقيقية a و b و c حيث

$$P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

3 - أ – بين أن :

$$x \in \mathbb{R} : P(x) + (x - 2) = (x - 2)^3$$

ب – استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة

$$8P(x) + 8(x - 2) = 1$$

الجواب :

1 - لدينا $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$$P(2) = 2^3 - 6.2^2 + 11.2 - 6$$
$$= 8 - 24 + 22 - 6$$
$$= 30 - 30$$
$$= 0$$

إذن $P(2) = 0$ ومنه 2 جذر للحدودية $P(x)$

2 – بما أن 2 جذر لـــ$P(x)$ فإن $P(x)$ تقبل القسمة على $(x - 2)$

نعتبر الموضعة التالية :



$$\begin{array}{l|l} x^3 - 6x^2 - 11x - 6 & x - 2 \\ \hline -x^3 - 2x^2 & x^2 - 4x + 3 \\ \hline 0 \quad -4x^2 + 11x & \\ \quad +4x^2 - 8x & \\ \hline \quad 0 \quad +3x - 6 & \\ \quad\quad -3x + 6 & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

إذن $P(x) = (x - 2)(x^2 - 4x + 3)$

ومنه $c = 3$ و $b = -4$ و $a = 1$

3 - أ – لدينا $P(x) + (x - 2)$

$= (x - 2)(x^2 + 4x + 3) + (x - 2)$

$= (x - 2)(x^2 - 4x + 3 + 1)$

$= (x - 2)(x^2 - 4x + 4)$

$= (x - 2)(x - 2)^2$

$= (x - 2)^3$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$

ب – $P(x) + (x - 2) = (x - 2)^3$

لدينا $8P(x) + 8(x - 2) = 1$

تعني $8[P(x) + (x - 2)] = 1$

أي أن $8(x - 2)^3 = 1$

أي أن $(x - 2)^3 = \frac{1}{8}$

ومنه $(x - 2)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

أي أن $x - 2 = \frac{1}{2}$

$x = 2 + \frac{1}{2}$

يعني $x = \frac{5}{2}$

وبالتالي $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

تمرين 28:

نعتبر الحدوديتين التاليتين

$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

و

$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

1 – أحسب $P(1)$ ثم عمل الحدودية $P(x)$

2 – أ – بين أن $Q(x) = -P(-x)$

ب – استنتج تعميلا لـ $Q(x)$

3 – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة

$Q(\sqrt{x}) = 0$

4 – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة

$$\frac{P(x) + Q(x)}{P(x) - Q(x)} = x$$

الجواب :

لدينا $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

$P(1) = 1^3 + 3.1^2 - 4$

$= 4 - 4$

$= 0$

إذن $P(x)$ تقبل القسمة على $x - 1$

نعتبر الموضعة التالية :

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 - 4 & x - 1 \\ \hline -x^3 + x^2 & x^2 + 4x + 4 \\ \hline 0 \quad 4x^2 - 4 & \\ \quad -4x^2 + 4x & \\ \hline \quad 0 \quad 4x - 4 & \\ \quad\quad -4x + 4 & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

إذن $P(x) = (x - 1)(x^2 + 4x + 4)$

$= (x - 1)(x + 2)^2$

إذن $P(x) = (x - 1)(x + 2)^2$

$-P(-x) = [(x)^3 + 3(-x)^2 - 4]$

$= -(-x^3 + 3x^2 - 4)$

$= x^3 - 3x^2 + 4$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$

$Q(x) = -P(-x)$

ب – لدينا

$P(x) = (x - 1)(x + 2)^2$

إذن $P(-x) = (-x - 1)(-x + 2)^2$

$= -(x + 1)(x - 2)^2$

$-P(-x) = (x + 1)(x - 2)^2$

ومنه $\boxed{Q(x) = (x + 1)(x - 2)^2}$

3 - $Q(\sqrt{x}) = 0$

$(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)^2 = 0$

$\sqrt{x} + 1 = 0$ أو $(\sqrt{x} - 2)^2 = 0$

تعني أن $\sqrt{x} - 2 = 0$ أو $\sqrt{x} = -1$ لا يمكن

يعني $\sqrt{x} = 2$

يعني $x = 4$

إذن $S = \{4\}$

4 - لدينا $\dfrac{P(x) + Q(x)}{P(x) - Q(x)} = x$

تكافئ $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 4 + x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 + 3x^2 - 4 - x^3 + 3x^2 - 4} = x$

أي أن $\dfrac{2x^3}{6x^2 - 8} = x$

أي أن $\dfrac{x^3}{3x^2 - 4} = x$

يعني أن $x^3 = (3x^2 - 4).x$

تكافئ $x^3 - (3x^2 - 4).x = 0$

$x[x^2 - (3x^2 - 4)] = 0$

أي أن $x(4 - 2x^2) = 0$

إذن $x = 0$ أو $-2x^2 + 4 = 0$

يعني $x = 0$ أو $x^2 = 2$

أي $x = 0$ أو $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$

ومنه $S = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

تمرين 29:

حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمات التالية ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o, \vec{i}, \vec{j})$



① $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases}$

② $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -x + \frac{y}{2} = -2 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 2x + 6y = 5 \\ 3x + 9y = 7 \end{cases}$

الجواب :

لدينا $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases}$

يعني $\begin{cases} 6x - 10y = -1 \\ -6x + 9y = 0 \end{cases}$

إذن $6x - 10y + (-6x) + 9y = -2$

يعني $-y = -2$

يعني $y = 2$

وبما أن $y = 2$ فإن

$-2x + 3 \times 2 = 0$

أي $-2x = -6$

$x = 3$

إذن $S = (3, 2)$

نعتبر المستقيمين (D_1) $3x - 5y = -1$

(D_2) $-2x + 3y = 0$

بما أن النظمة ① تقبل حلا وحيدا فإن المستقيمين (D_1) و $(D2)$ يتقاطعان في نقطة واحدة $I(3 , 2)$.

لدينا $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -x + \frac{y}{2} = -2 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -4x + 2y = -8 \end{cases}$

أي أن $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$

يعني $4x - 2y = 8$

أي أن $2x - y = 4$

$y = 2x - 4$

$S = \{(x , 2x, -4) / x \in \mathbb{R}\}$

نعتبر المستقيمين (D_1) $4x - 2y = 8$

(D_2) $-x + \frac{y}{2} = -2$

بما أن النظمة (S) تقبل ما لا نهاية من الحلول فإن المستقيمين (D_1) و (D_2) منطبقان.

أي $(D_1) = (D_2)$

لدينا $\begin{cases} 2x + 6y = 5 \\ 3x + 9y = 7 \end{cases}$

يعني $\begin{cases} 6x + 18y = 15 \\ 6x + 18y = 14 \end{cases}$

ومنه $15 = 14$ وهذا غير ممكن

إذن $S = \phi$

نعتبر المستقيمين $(D_1) : 2x - 4y = 5$

$(D_2) : 3x + 9y = 7$

بما أن النظمة ③ لا تقبل حلول فإن (D_1)



و (D_2) متوازيان قطعا.

$$(D_1)//(D_2)$$

تمرين 30:

1 - حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية

$$① \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

2 - حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية

$$② \begin{cases} 3\,|x - 1| - 2y = 4 \\ |x - 1| + 2y^2 = 4 \end{cases}$$

الجواب :

1 - لدينا

$$① \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

و

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

إذن النظمة ① تقبل حلا وحيدا وهو :

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta} , \frac{\Delta y}{\Delta}\right)$$

لدينا

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

و

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

إذن

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{16}{8} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{16}{8} = 2$$

ومنه $S = (2,1)$

لدينا

$$\begin{cases} 3\,|x - 1| - 2y = 4 \\ |x - 1| + 2y^2 = 4 \end{cases}$$

نضع

$$X = |x - 1|$$

$$Y = y^2$$

إذن ② تكافئ

$$\begin{cases} 3X - 2Y = 4 \\ X + 2Y = 4 \end{cases}$$

حسب ① لدينا

$$X = 2$$

$$Y = 1$$

أي أن

$$|x - 1| = 2$$

$$Y^2 = 1$$

$|x - 1| = 2$ يعني أن

$x - 1 = 2$ أو $x - 1 = -2$

$x = 3$ أو $x = -1$

$Y^2 = 1$ تعني أن

$y = -1$ أو $y = 1$

ومنه

$$S = \{(3,1) ; (3,-1) ; (-1,1) ; (-1,-1)\}$$

تمرين 31:

حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية

$$① \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = 2 \\ \frac{2}{x} + \frac{7}{y} = 22 \end{cases}$$





$$\begin{cases} 2(1-2x)-7(y+1)=4 \\ 3(2x-1)+2(y+1)=11 \end{cases} \quad ②$$

الجواب :

لدينا $\begin{cases} \frac{3}{x}-\frac{5}{y}=2 \\ \frac{2}{x}+\frac{7}{y}=22 \end{cases}$ ①

لنضع $Y=\frac{1}{y}$ و $X=\frac{2}{x}$

إذن ① تكافئ

$$\begin{cases} 3X-5Y=2 \\ 2X+7Y=25 \end{cases}$$

تكافئ $\begin{cases} 6X-10Y=4 \\ -6X-21Y=-66 \end{cases}$

إذن $-31Y=-62$

ومنه $Y=2$

لدينا $3X-5Y=2$

أي $3X-5\times 2=2$

يعني $3X=12$

ومنه $X=4$

إذن $\begin{cases} \frac{1}{x}=4 \\ \frac{1}{y}=2 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

وبالتالي $S=\left\{\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\right\}$

لدينا $\begin{cases} 2(1-2x)-7(y+1)=4 \\ 3(2x-1)+2(y+1)=11 \end{cases}$

لنضع $Y=y+1$ $X=2x-1$

إذن ② تكافئ $\begin{cases} 2X-7Y=4 \\ -3X+2Y=11 \end{cases}$

أي أن $\begin{cases} 6X-21Y=12 \\ -6X+4Y=22 \end{cases}$

ومنه $-17Y=34$

ومنه $Y=-2$

ولدينا $2X-7Y=4$

ومنه $2X-7(-2)=4$

$2X=4-14$

$2X=-10$

إذن $X=-5$

لدينا $\begin{cases} X=-5 \\ Y=-2 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 2x-1=-5 \\ y+1=-2 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 2x=-4 \\ Y=-3 \end{cases}$

أي : $x=-2$ و $y=-3$

ومنه $S=\{(-2,-3)\}$

تمرين 32:

حل مبيانيا المتراجحات التالية

1 - $x-y-2\leq 0$

2 - $2x+y+1>0$

3 - $1-x>0$

4 - $-2y\geq 5$

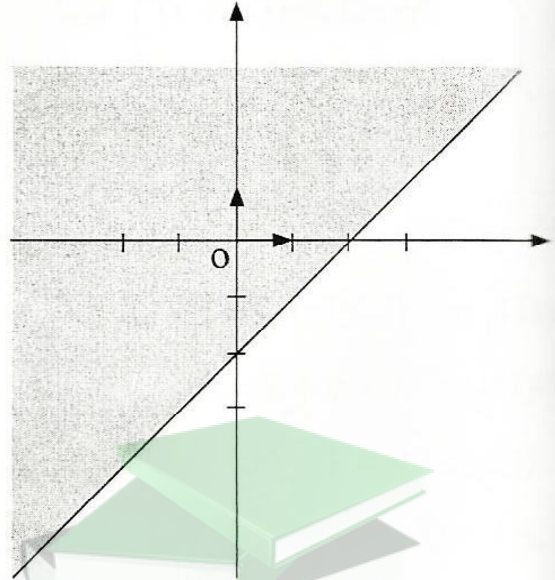


الجواب :

1- $x - y - 2 \leqslant 0$

نعتبر المستقيم $(D) : x - y - 2 = 0$

$A(2,0)$ و $B(1,-1)$ نقطتين من (D)

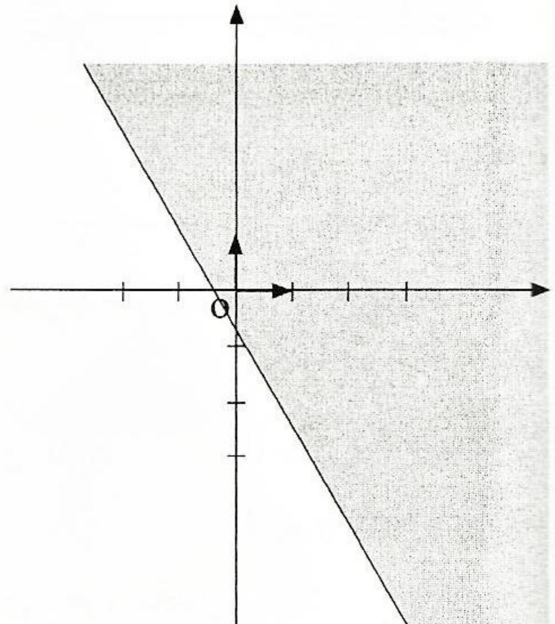


مجموعة حلول المتراجحة $x - y - 2 \leqslant 0$ هي الجزء المخدش.

2- $2x + y + 1 = 0$

نعتبر المستقيم $(\Delta) : x - y - 2 = 0$

لدينا $A(0,-1)$ و $B(-1,1)$ نقطتين من (Δ)



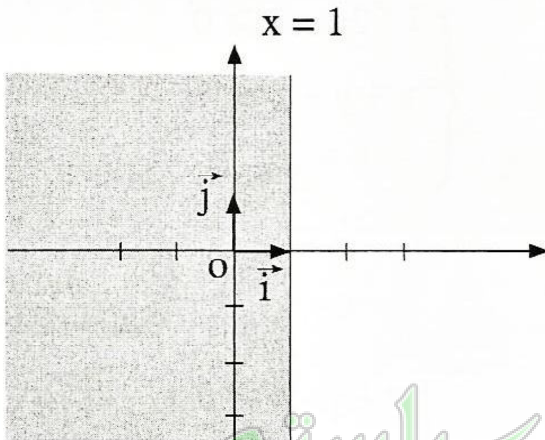
مجموعة حلول المتراجحة $2x + y + 1 > 0$ هي الجزء المخدش.

3- لدينا $1 - x > 0$

أي أن $-x > -1$

إذن $x < 1$

$x = 1$



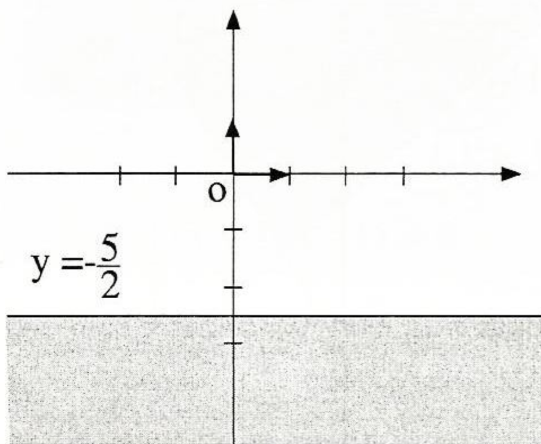
مجموعة حلول المتراجحة $1 - x > 0$ هذا الجزء المخدش.

4- $-2y \geqslant 5$

أي أن $2y \leqslant -5$

$y \leqslant -\frac{5}{2}$

(Δ) $y = -\frac{5}{2}$



مجموعة حلول المتراجحة $-2y \geqslant 5$ هي الجزء المخدش.



تمرين 33:

حل مبيانيا النظمتين التاليتين

$$\begin{cases} x + y - 4 \geqslant 0 \\ 2x + y + 1 \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 2 \geqslant 0 \\ x + y + 2 > 0 \\ y \leqslant 4 \end{cases}$$

الجواب :

$$\begin{cases} x + y - 4 \geqslant 0 \\ 2x - y + 1 \leqslant 0 \end{cases}$$

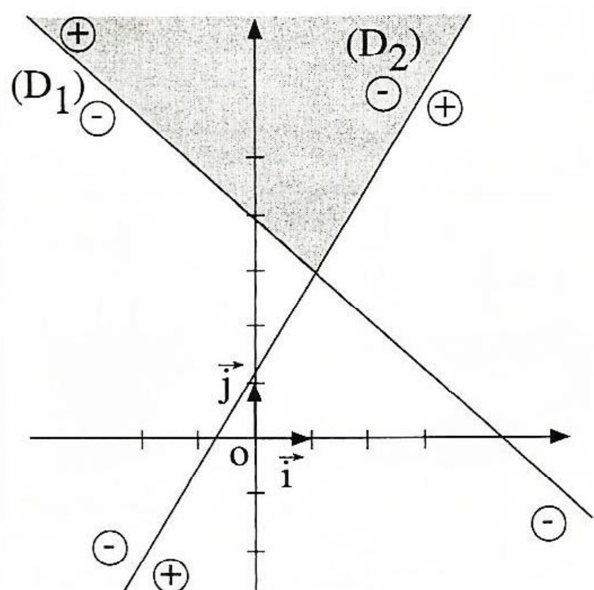
نعتبر المستقيمين

$(D_1) : \quad x + y - 4 = 0$

$(D_2) : \quad 2x - y + 1 = 0$

لدينا $A(2,2)$ و $B(0,4)$ نقطتين من (D_1)

لدينا $E(0,1)$ و $F(1,3)$ نقطتين من (D_2)



مجموعة حلول المتراجحة

$$\begin{cases} x + y - 4 \geqslant 0 \\ 2x + y + 1 \leqslant 0 \end{cases}$$

هي الجزء المخدش

2 – لدينا

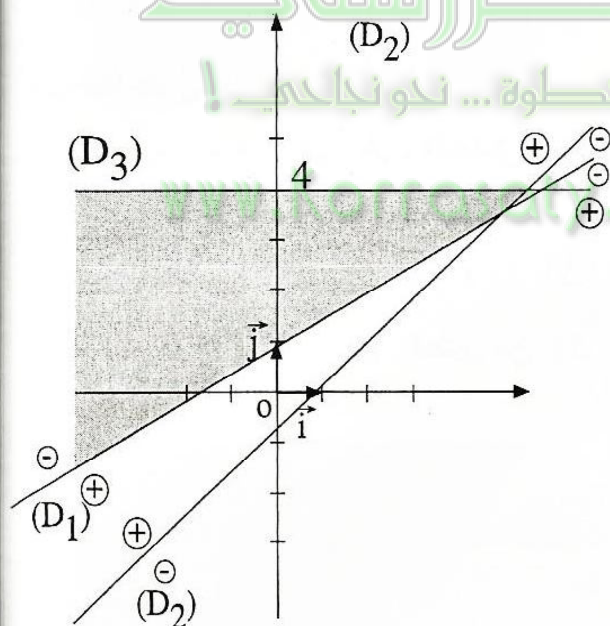
$$\begin{cases} x - 2y + 2 \geqslant 0 \\ x + y + 2 > 0 \\ y \leqslant 4 \end{cases}$$

نعتبر المستقيمات

$(D_1) : \quad x - 2y + 2 = 0$

$(D_2) : \quad x + y + 2 = 0$

$(D_3) : \quad y = 4$



مجموعة حلول النظمة

$$\begin{cases} x - 2y + 2 \geqslant 0 \\ x + y + 2 > 0 \\ y \leqslant 4 \end{cases}$$

هي الجزء المخدش



تمرين 34:

حل مبيانيا ما يلي :

-1 $(x+2y-1)(x-y) \leqslant 0$

-2 $\begin{cases} (x+2)(y-1) \geqslant 0 \\ x+y-2<0 \end{cases}$

الجواب :

لدينا $(x+2y-1)(x-y) \leqslant 0$

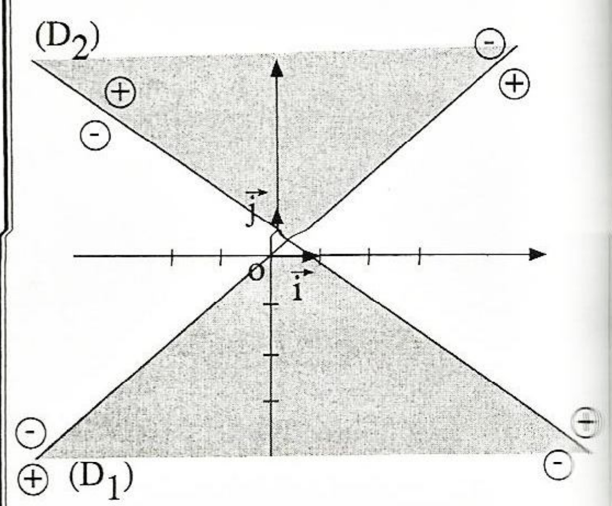
تكافئ :

$\begin{cases} x-y \geqslant 0 \\ x+2y-1 \leqslant 0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x-y \geqslant 0 \\ x+2y-1 \leqslant 0 \end{cases}$

نعتبر المستقيمين

$(D_1): \ x-y=0$

$(D_2): \ x+2y-1=0$



حل المتراجحة المخدش

-2 $\begin{cases} (x+2)(y-1) \geqslant 0 \\ x+y-2<0 \end{cases}$

تكافئ :

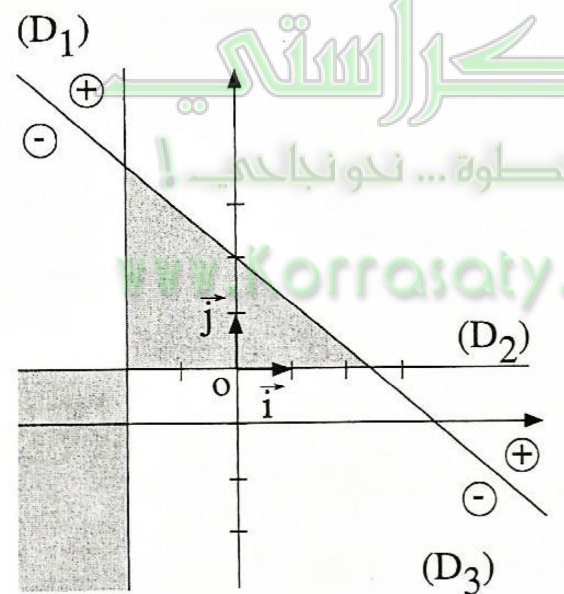
$\begin{cases} x+2 \leqslant 0 \\ y-1 \leqslant 0 \\ x+y-2<0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x+2 \geqslant 0 \\ y-1 \geqslant 0 \\ x+y-2<0 \end{cases}$

نعتبر المستقيمات :

$(D_1): \ x+2=0$

$(D_2): \ y-1=0$

$(D_3): \ x+y-2=0$

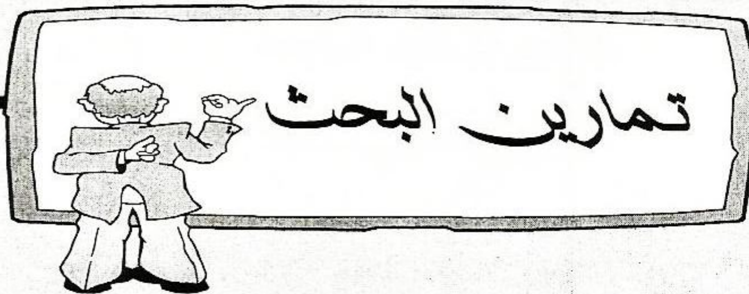


حلول النظمة

-2 $\begin{cases} (x+2)(y-1) \geqslant 0 \\ x+y-2<0 \end{cases}$

هي الجزء المخدش





تمرين 1 :

أحسب مايلي :

$$A = \frac{(16)^3 \times (27)^4 . 6^5}{2^{13} \times 3^9 \times (18)^3}$$

$$B = \frac{(15)^3 \times 2^4 . 10^3}{(16)^{25} \times 6^3 \times (10)^{-2}}$$

$$C = (48 - 5^2 \times 2 - 1)^2 - (7^2 - 23 \times 2)^2$$

تمرين 2 :

نعتبر العددين

$a = \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$ و $b = \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$

1 - احسب $a^2 + b^2$ و $a.b$

2 - استنتج كتابة بسيطة للعدد $a + b$

تمرين 3 :

1 - حل في $\mathbb{R}$

$$* \ 2 - x = \frac{3 - x}{2} - \frac{2 + x}{3}$$

$$* \ (x + 2)(3x - 1) = 2x^2 - 8$$

2 - حل في $\mathbb{R}$

$$\frac{x - 1}{2} - x \leqslant \frac{x - 2}{3} + \frac{3 - x}{4}$$

$$\frac{2}{1 - x} \leqslant 3$$

تمرين 4 :

ليكن n من $\mathbb{N}$

1 – بين أن $1 + 2 + \dots\dots\dots\dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$



2 – أ– أحسب

$$A = (2004)(1 + 2 + 3 + ... + 2003)$$

$$B = (2003)(1 + 2 + 3 + ...+ 2004)$$

ب – قارن العددين A و B

تمرين 5 :

1 – حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمة التالية :

$$\begin{cases} 17x - 13y = 3 \\ 4x + y = 21 \end{cases}$$

2 – استنتج حلول النظمتين التاليتين

$$\begin{cases} 17x^2 - 13y^2 = 3 \\ 4x^2 + y^2 = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{17}{x} - 13\sqrt{y} = 2 \\ \frac{4}{x} + \sqrt{y} = 21 \end{cases}$$

تمرين 6 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$\frac{5}{3x+2} = -2$$

$$\frac{x^2+x+2}{-4x+1} = 2$$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x} = 1$$

تمرين 7 :

لتكن الحدودية

$$P(x) = 2x^3 + ax^2 + (b + 1)x - 3b$$

حيث a و b من $\mathbb{R}$

1 – حدد العددين a وb إذا علمت أن :



$P(2) = 0$ و $P(1) = 2$

2 – نفترض أن في هذا السؤال $a = -5$ و $a = -2$

أ – أوجد الحدودية $Q(x)$ حيث :

$$P(x) = (x - 2).Q(x)$$

ب – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$ ثم عمل $P(x)$ إلى جداء حدوديات من الدرجة الأولى

ج – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة

$$2(x - 3)^3 - 5(x - 3)^2 - x + 9 = 0$$

تمرين 8 :

ليكن a و b و c أعداد حقيقية غير منعدمة حيث :

$$ab + bc + ca = 0$$

أحسب :

$$A = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{c+a}{c}$$

تمرين 9 :

نعتبر العددان الحقيقيان a و b حيث

$a \neq 1$ $\quad b \neq \frac{5}{2}$ $\quad a \neq 2b$

1 - عمل : $P = a^2 - 4b^2 - a + 2b$

2 - استنتج أنه إذا كان :

$\frac{a}{2b-1} = \frac{2b}{a-1}$ فإن $a = 1 - 2b$



الترتيب في (R) المتراجحات من الدرجة الأولى

- عدد الصفحات : [29]
- عدد التمارين : [31]
- عدد تمارين البحث : [13]





3 الترتيب في $\mathbb{R}$ والمتراجحات من الدرجة الأولى

1 - تعريف : $b \leqslant a$ تكافئ $b - a \in \mathbb{R}^+$

2 - خاصيات :

$a \leqslant b$ تكافئ $a + c \leqslant b + c$ لكل $c \in \mathbb{R}$

$a \leqslant b$ تكافئ $ac \leqslant bc$ لكل $c > 0$

$a \leqslant b$ تكافئ $ac \geqslant bc$ لكل $c < 0$

إذا كان $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases}$ فإن $a + c \leqslant b + d$

a , b , c , d أعداد موجبة :

إذا كان $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases}$ فإن $ac \leqslant bd$

a و b موجبان

$a \leqslant b$ تكافئ $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$

$a \leqslant b$ تكافئ $a^n \leqslant b^n$ لكل $n \in \mathbb{N}$

a و b غير منعدمان ولهما نفس الإشارة

$a \leqslant b$ تكافئ $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$

3 - القيمة المطلقة :

a - تعريف : $x \in \mathbb{R}$; $|x| = x$ إذا كان $x \geqslant 0$

$|x| = -x$ إذا كان $x \leqslant 0$

b - خاصيات :

$|x| = 0$ تكافئ $x = 0$

$|x| = |y|$ تكافئ $x = y$ أو $x = -y$

$|x| = a$ تكافئ $x = a$ أو $x = -a$ مع $a \geqslant 0$





$|x| \leqslant a$ تكافئ $-a \leqslant x \leqslant a$

$|x| \geqslant a$ تكافئ $x \geqslant a$ أو $x \leqslant -a$

4 ـ التأطير :

a - إذا كان $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$ فإن $\begin{cases} a + c \leqslant x + y \leqslant b + d \\ a - d \leqslant x - y \leqslant b - c \end{cases}$

b - إذا كانت a , b , c , d أعداد موجبة

و $a \leqslant x \leqslant b$ و $c \leqslant y \leqslant d$

فإن $ac \leqslant xy \leqslant bd$

c - لتأطير $\frac{x}{y}$ نأطر $\frac{1}{y}$ ثم نضرب تأطير x وتأطير $\frac{1}{y}$ مع مراعاة أن تكون الأطراف كلها موجبة

5 ـ اشارة : $ax + b$; $a \neq 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	اشارة $-a$	0	اشارة a

6 ـ التقريب :

تعريف : ليكن x من و $r > 0$

A تقريب للعدد x إلى r إذا وفقط إذا كان $|x - a| \leqslant r$

A تقريب للعدد x إلى r بتفريط إذا كان $A \leqslant x \leqslant A + r$

A تقريب للعدد x إلى r بإفراط إذا كان $A - r \leqslant x \leqslant A$

ملاحظة : إذا كان $a \leqslant x \leqslant b$ فإن

a تقريب للعدد x إلى $b - a$ بتفريط

b تقريب للعدد x إلى $b - a$ بافراط

– إذا كان $N. 10^{-n} \leqslant x \leqslant (N + 1). 10^{-n}$ حيث $N \in \mathbb{Z}$

العدد $N. 10^{-n}$ تقريب عشري للعدد x من الرتبة n بتفريط

العدد $(N + 1). 10^{-n}$ تقريب عشري للعدد x من الرتبة n بافراط



تمارين وحلولها

تمرين 1 :

لتكن $n \in \mathbb{N}$ قارن العددين

$$A = \frac{1}{(n+5)(n+1)} ; B = \frac{1}{(n+4)(n+2)}$$

الجواب :

نقارن مقامي العددين A و B

$$(n+5)(n+1) - (n+4)(n+2)$$
$$= n^2 + 6n + 5 - n^2 - 6n - 2$$
$$= 3 > 0$$

و منه $(n+5)(n+1) > (n+4)(n+2)$

$$\frac{1}{(n+5)(n+1)} < \frac{1}{(n+4)(n+2)}$$

$$A < B$$

تمرين 2 :

لتكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $-2 < b < -1$

$2 < a < 3$ اعط تأطير للأعداد التالية :

$a+b$ و $2a-b$ و $2a^2+1$ و $4-b^2$

الجواب :

لدينا $\begin{cases} 2 < a < 3 \\ -2 < b < -1 \end{cases}$ إذن $0 < a+b < 2$

لدينا $\begin{cases} 2 < a < 3 \\ -2 < b < -1 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 4 < 2a < 6 \\ 1 < -b < 2 \end{cases}$

ومنه $5 < 2a - b < 8$

لدينا $2 < a < 3$ ومنه $4 < a^2 < 9$

إذن $8 < 2a^2 < 18$

وبالتالي $\boxed{9 < 2a^2 + 1 < 19}$

لدينا $-2 < b < -1$ لدينا $1 < -b < 2$

ومنه $1 < b^2 < 4$

إذن $-4 < -b^2 < -1$

وبالتالي $\boxed{0 < 4 - b^2 < 3}$

تمرين 3 :

لتكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $a \in [1,2]$ و $b \in [-1,3]$

1 – أطر الأعداد $3a$; $-5b$; a^2 ; b^2

2 – استنتج تأطير للعدد : $A = a^2 - b^2 + 3a - 5b + 1$

3 – اعط تأطيرا للعدد ab

الجواب :

1 - لدينا $a \in [1,2]$ إذن $1 \leqslant a \leqslant 2$

ومنه $\boxed{3 \leqslant 3a \leqslant 6}$

لدينا $a \in [-1,3]$ إذن $-1 \leqslant b \leqslant 3$

ومنه $\boxed{-15 \leqslant -5a \leqslant 5}$

لدينا $1 \leqslant a \leqslant 2$ إذن $\boxed{3 \leqslant 3a \leqslant 6}$

لدينا $-1 \leqslant b \leqslant 3$

يعني $0 \leqslant b \leqslant 3$ أو $-1 \leqslant b \leqslant 0$

يعني $0 \leqslant b \leqslant 3$ أو $0 \leqslant -b \leqslant 1$



إذن $0 \leqslant b^2 \leqslant 9$ أو $0 \leqslant b^2 \leqslant 1$

وبالتالي $\boxed{0 \leqslant b^2 \leqslant 9}$

2 – لدينا
$$\begin{cases} 1 \leqslant a^2 \leqslant 4 \\ -9 \leqslant -b^2 \leqslant 0 \\ 3 \leqslant 3a \leqslant 6 \\ -15 \leqslant -5b \leqslant 5 \end{cases}$$

بجمع هذه المتفاوتات نحصل على :

$$1-9+3-15 \leqslant a^2-b^2+3a-5b \leqslant 4+0+6+5$$

أي $-20 \leqslant A-1 \leqslant 15$

ومنه $\boxed{-19 \leqslant A \leqslant 16}$

تمرين 4:

اكتب التعابير التالية بدون رمز القيمة المطلقة :

$A = |2x-3|$

$B = |4-2x|$

$C = |x-1| - 2|x|$

الجواب :

جدول إشارة $2x - 3$

لدينا

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x-3$	$-$	0	$+$

ومنه
$$\begin{cases} A = |2x-3| = 2x-3 \quad ; \quad x \geqslant \frac{3}{2} \\ A = |2x-3| = -2x+3 \quad ; \quad x \leqslant \frac{3}{2} \end{cases}$$

جدول إشارة $4 - 2x$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$4-2x$	$+$	0	$-$

إذن
$$\begin{cases} B = |4-2x| = 4-2x \quad ; \quad x \leqslant 2 \\ B = |4-2x| = 4-2x \quad ; \quad x \geqslant 2 \end{cases}$$

جدول إشارة كل من $x - 1$ و x

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	0 $+$		$+$

إذن في المجال $]-\infty , 0]$

$C = |x-1| - 2|x| = -(x-1) + 2x$

$= -x + 1 + 2x = x + 1$

في المجال $[0 , 1]$

$C = |x-1| - 2|x|$

$= -(x-1) + 2x = -x + 1 - 2x$

$= -3x + 1$

في المجال $[1 , +\infty[$

$C = |x-1| - 2|x|$

$= x - 1 - 2x$

$= -x - 1$

خلاصة :
$$\begin{cases} C = x+1 \quad ; \quad x \leqslant 0 \\ C = -3x+1 \quad ; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ C = -x-1 \quad ; \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

تمرين 5:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1)- $|2x-1| = 5$; 3)- $|6-x| = -1$

2)- $|2+x| = 0$; 4)- $\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = 1$



الجواب :

1) $|2x - 1| = 5$

يعني $2x - 1 = 5$ أو $2x - 1 = -5$

يعني $2x = 6$ أو $2x = -4$

يعني $x = \frac{6}{2} = 3$ أو $x = -\frac{4}{2} = -2$

وبالتالي $S = \{-2 , 3\}$

2) $|2 + x| = 0$ يعني $2 + x = 0$

يعني $x = -2$

وبالتالي $S = \{-2\}$

3) $|6 - x| = -1$ غير ممكن لأن القيمة المطلقة دائما موجبة. $S = \phi$

4) مجموعة التعريف D

$x \in D$ يعني $x + 2 \neq 0$

يعني $x \neq -2$

وبالتالي $S = \mathbb{R} - \{-2\}$

$\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = 1$ يعني $\frac{x-2}{x+2} = 1$ أو $\frac{x-2}{x+2} = -1$

يعني $x - 2 = x + 2$ أو $x - 2 = -x - 2$

يعني $-2 = 2$ أو $2x = 0$

يعني $x = 0$ أو $-2 = 2$ غير ممكن

وبالتالي $S = \{0\}$

تمرين 6:

حل في $\mathbb{R}$ مايلي :

1) $|2x - 1| \leqslant 3$; 3) $|-x - 2| < -11$

2) $|4x - 5| < 0$; 4) $|4x + 5| > -3$

5) $|x - 3| \geqslant 2$

الجواب :

1) $|2x - 1| \leqslant 3$ يعني $-3 \leqslant 2x - 1 \leqslant 3$

يعني $-2 \leqslant 2x \leqslant 4$

يعني $-1 \leqslant x \leqslant 2$

وبالتالي $S = [-1 , 2]$

2) $|4x - 5| < 0$ غير ممكن إذن $S = \phi$

3) $|-x - 2| < -11$ غير ممكن إذن $S = \phi$

4) $|4x + 5| > -3$ هذا دائما صحيح كيفما كانت x ومنه $S = \mathbb{R}$

5) $|x - 3| \geqslant 2$ يعني $x - 3 \geqslant 2$ أو $x - 3 \leqslant -2$

يعني $x \geqslant 5$ أو $x \leqslant 1$

وبالتالي $S =]-\infty , 1] \cup [5 , +\infty[$

تمرين 7:

1 – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $1 - x = 2|x|$

2 – حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين :

a) $|x - 2| + 2x = 5$

b) $|2x + 1| + |x - 1| = 3x + 1$

الجواب :

1 – لدينا $1 - x = 2|x|$

الحالة 1 : $x \geqslant 0$

المعادلة تكافئ $1 - x = 2x$

تعني $1 = 3x$

تعني $x = \frac{1}{3}$



وبالتالي $S_1 = \{\frac{1}{3}\}$

الحالة 2 : $x \leqslant 0$

المعادلة تكافئ $1 - x = -2x$

تعني $1 = -2x + x$

تعني $1 = -x$

تعني $x = -1$

ومنه $S_2 = \{-1\}$

وبالتالي $S = S_1 \cup S_2$

$S = \{-1, \frac{1}{3}\}$

2 - a - نعتبر المعادلة : $|x - 2| + 2x = 5$

الحالة 1 : $x \geqslant 2$

المعادلة تكافئ $x - 2 + 2x = 5$

تكافئ $3x = 7$

تكافئ $x = \frac{7}{3}$

وحيث أن $\frac{7}{3} \geqslant 2$ فإن $S_1 = \{\frac{7}{3}\}$

الحالة 2 : $x \leqslant 2$

المعادلة تكافئ $-x + 2 + 2x = 5$

تكافئ $x = 3$

وحيث أن $3 > 2$ فإن $S_2 = \phi$

وبالتالي $S = \{\frac{7}{3}\}$

b - لدينا $|2x + 1| + |x - 1| = 3x + 1$

لدينا

x	$-\infty$ ... $\frac{-1}{2}$	... 1	... $+\infty$
$\|2x + 1\|$	$-2x - 1$	$2x + 1$	$2x + 1$
$\|x - 1\|$	$-x + 1$	$x - 1$	$x - 1$
$\|2x + 1\| + \|x - 1\|$	$-3x$	$x + 2$	$3x$

الحالة 1 : في المجال $]-\infty , \frac{-1}{2}]$

المعادلة تكافئ $-3x = 3x + 1$

تكافئ $-6x = 1$

تكافئ $x = \frac{-1}{6}$

وحيث أن $\frac{-1}{6} \notin]-\infty , \frac{-1}{2}]$ فإن $S_1 = \phi$

الحالة 2 : في المجال $[\frac{-1}{2} , 1]$

المعادلة تكافئ $x + 2 = 3x + 1$

يعني $2x = 1$

يعني $x = \frac{1}{2} \in [\frac{-1}{2} , 1]$

إذن $S_2 = \{\frac{1}{2}\}$

الحالة 3 : في المجال $[1 , +\infty[$

المعادلة تكافئ $3x = 3x + 1$

يعني $0 = 1$ غير ممكن

إذن $S_3 = \phi$

الحل النهائي $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$= \{\frac{1}{2}\}$

تمرين 8:

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ بحيث $1 \leqslant x \leqslant 4$

و $|y + 2| < 1$ اعط تأطيرا للأعداد التالية :

$x - y$ و xy و $2\sqrt{x} + 5$ و $\frac{1}{x+1}$ و $\frac{x}{y}$

الجواب :

لدينا $|y + 2| < 1$ يعني $-1 < y + 2 < 1$

يعني $-3 < y < -1$



إذن $1 < -y < 3$

ولدينا $1 \leqslant x \leqslant 4$

إذن $\boxed{2 \leqslant x - y \leqslant 7}$

لدينا $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ -3 < y < -1 \end{cases}$ و يعني $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 1 < -y < 3 \end{cases}$

إذن $1 < -xy < 12$

وبالتالي $\boxed{-12 \leqslant xy \leqslant -1}$

لدينا $1 \leqslant x \leqslant 4$ إذن $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2$

ومنه $2 \leqslant 2\sqrt{x} \leqslant 4$

إذن $\boxed{7 \leqslant 2\sqrt{x} + 5 \leqslant 9}$

لدينا $1 \leqslant x \leqslant 4$ إذن $2 \leqslant x + 1 \leqslant 5$

ومنه $\boxed{\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{2}}$

لدينا $1 < -y < 3$ إذن $\frac{1}{3} < -\frac{1}{y} < 1$

ولدينا $1 < x < 4$ إذن $\frac{1}{3} < -\frac{x}{y} < 4$

ومنه $\boxed{-4 < \frac{x}{y} < -\frac{1}{3}}$

تمرين 9:

ليكن x عددا حقيقيا ينتمي إلى $[2 , 3]$

1 – أ – تحقق أن: $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$

ب – استنتج أن $-4 \leqslant x^2 - 4x \leqslant -3$

2 – بين أن : $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x^2 - 4x + 5} \leqslant 1$

ثم استنتج أن $\left|\frac{1}{x^2 - 4x + 5} - \frac{3}{4}\right| \leqslant \frac{1}{4}$

الجواب :

1 – أ – لدينا

$$(x - 2)^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 - 4$$
$$= x^2 - 4x$$

ومنه $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$

ب – لدينا $2 \leqslant x \leqslant 3$ إذن $0 \leqslant x - 2 \leqslant 1$

ومنه $0 \leqslant (x - 2)^2 \leqslant 1$

$$-4 \leqslant (x - 2)^2 - 4 \leqslant -3$$

وبالتالي $-4 \leqslant x^2 - 4x \leqslant -3$

2 – لدينا $-4 \leqslant x^2 - 4x \leqslant -3$

يعني $1 \leqslant x^2 - 4x + 5 \leqslant 2$

ومنه $\boxed{\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x^2 - 4x + 5} \leqslant 1}$

لدينا $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x^2 - 4x + 5} \leqslant 1$

إذن $-\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{x^2 - 4x + 5} - \frac{3}{4} \leqslant \frac{1}{4}$

وبالتالي $\left|\frac{1}{x^2 - 4x + 5} - \frac{3}{4}\right| \leqslant \frac{1}{4}$

تمرين 10:

a و b عددان حقيقيان حيث :

$|2a - 1| < 1$ و $1 < 4b^2 + a^2 + 1 < 4$

1 – اعط تأطيرا للعدد a

2 – بين أن $|b| < 1$

3 – أطر العدد $a \times b$



الجواب :

1– لدينا $|2a-1|<1$ يعني $-1<2a-1<1$

يعني $0<2a<2$

يعني $\boxed{0<a<1}$

2– لدينا $1<4b^2+a^2+1<4$ ①

ولدينا $0<a<1$ إذن $0<a^2<1$

ومنه $-1<-a^2<0$ ②

بجمع ① و ② نستنتج أن

$1-1<4b^2+a^2+1-a^2<4+0$

إذن $0<4b^2+1<4$

أي $-1<4b^2<3$

إذن $-\frac{1}{4}<b^2<\frac{3}{4}$

ومنه $0\leqslant b^2\leqslant\frac{3}{4}<1$

ومنه $|b|<1$

3– لدينا $|b|<1$ يعني $0\leqslant b<1$

أو $-1<b\leqslant 0$

الحالة 1 : $0\leqslant b\leqslant 1$

ولدينا $0<a<1$ إذن $0\leqslant ab<1$

الحالة 2 : $-1<b\leqslant 0$ أي $0\leqslant -b<1$

ولدينا $0<a<1$ إذن $0\leqslant -ab<1$

أي $-1<ab\leqslant 0$

وبالتالي $-1<ab<1$

تمرين 11:

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث :

$|a|<1$ و $|b+\frac{3}{2}|<\frac{1}{2}$

1 – بين أن : $-2<b<-1$

2 – اعط تأطيرا لــ ab^2 و $\frac{2b}{a-2}$

3 – ليكن العدد A بحيث :

$A=-b^2+b+ab-a$

a – بين أن : $A=(a-b)(b-1)$

b – اعط تأطيرا للعدد A سعته 9

الجواب :

1 – لدينا $|b+\frac{3}{2}|<\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{1}{2}<b+\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$

يعني $-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}<b<\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$

يعني $\boxed{-2<b<-1}$

2 – لدينا $|a|<1$ يعني $-1<a<1$

يعني $0\leqslant a<1$ أو $-1<a\leqslant 0$

ولدينا $-2<b<-1$ يعني $1<-b<2$

إذن $1<b^2<4$

الحالة 1 : $0\leqslant a<1$

و $1<b^2<4$ إذن $\boxed{0\leqslant ab^2<4}$

الحالة 2 : $-1<a\leqslant 0$ أي $0\leqslant -a<1$

ولدينا $1<b^2<4$

ومنه $0\leqslant -ab^2<4$ أي $-4<ab^2\leqslant 0$

وبالتالي $\boxed{-4<ab^2<4}$

لدينا $-2 < b < -1$ إذن $2 < -2b < 4$

ولدينا $-1 < a < -1$ إذن $-3 < a - 2 < -1$

ومنه $-1 < \frac{1}{a-2} < -\frac{1}{3}$

أي $\frac{1}{3} < \frac{-1}{a-2} < 1$

وحيث أن $2 < -2b < 4$

فإن $\boxed{\frac{2}{3} < \frac{2b}{a-2} < 4}$

3 – a – لدينا $A = -b^2 + b + ab - a$

$= -b(b-1) + a(b-1)$

$= (b-1)(-b+a)$

وبالتالي $A = (a-b)(b-1)$

b – لدينا $-2 < b < -1$ إذن $-3 < b - 1 < -2$

أي $2 < -(b-1) < 3$

ولدينا $-1 < a < 1$

و $1 < -b < 2$ إذن $0 < a - b < 3$

ومنه $0 < -(b-1)(a-b) < 9$

أي $-9 < (b-1)(a-b) < 0$

إذن $-9 < A < 0$

وهذا تأطير للعدد A سعته 9

تمرين 12:

a و b عددان حقيقيان $1 < a < 3$

و $|a + b - 2| < 1$

1 – بين أن $|b| < 2$

2 – أ – أطر العدد $a + b$

ب – استنتج قيمة العدد

$A = |a + b - 5| + |a + b + 1|$

الجواب :

1 – لدينا $|a + b - 2| < 1$

يعني $-1 < a + b - 2 < 1$

يعني $1 < a + b < 3$ ①

ونعلم أن $1 < a < 3$

أي $-3 < -a < -1$ ②

بجمع المتفاوتتين ① و ② نحصل على :

$-2 < b < 2$ أي $|b| < 2$

2 – أ – لدينا $|b| < 2$ أي $-2 < b < 2$

ولدينا $1 < a < 3$

إذن $-1 < a + b < 5$

ب – لدينا $-1 < a + b$ أي $a + b + 1 > 0$

إذن $|a + b + 1| = a + b + 1$

ولدينا $a + b < 5$ إذن $a + b - 5 < 0$

إذن $|a + b - 5| = -a - b + 5$

وبالتالي $A = |a + b - 5| + |a + b + 1|$

$= -a - b + 5 + a - b + 1$

إذن $A = 6$

تمرين 13:

ليكن x و y من R بحيث :

$x \geqslant \frac{1}{3}$ و $y \leqslant 2$ و $x - y = 2$

1 – أحسب قيمة العدد E بحيث

$E = \sqrt{(3x-1)^2} + \sqrt{(3y-6)^2}$

2 – أ – تحقق أن $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 4$ و $\frac{-5}{3} \leqslant y \leqslant 2$

ب – أحسب قيمة F حيث :

$F = |x + y - 6| + |x + y + \frac{4}{3}|$





الجواب :

1 – لدينا $E = \sqrt{(3x-1)^2} + \sqrt{(3y-6)^2}$

$= |3x-1| + |3y-6|$

$= 3x - 1 - (3y - 6)$ لأن $\begin{cases} 3x-1 \geqslant 0 \\ 3y-6 \leqslant 0 \end{cases}$

$= 3x - 1 - 3y + 6$

$= 3(x-y) + 5$

$= 3\times 2 + 5$

إذن $E = 11$

2 – أ – لنتحقق أن $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 4$ و $\frac{-5}{3} \leqslant y \leqslant 2$

لدينا $\frac{1}{3} \leqslant x$

ولدينا $x - y = 2$ إذن $x = y + 2$

ونعلم أن $y \leqslant 2$ إذن $y + 2 \leqslant 4$ أي $x \leqslant 4$

وبالتالي $\boxed{\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 4}$

لدينا $y \leqslant 2$

ونعلم أن $\frac{1}{3} \leqslant x$ و $x = y + 2$

إذن $\frac{1}{3} \leqslant y + 2$ أي $\frac{1}{3} - 2 \leqslant y$

يعني $y + 2 \leqslant 4$

وبالتالي $\boxed{-\frac{5}{3} \leqslant y \leqslant 2}$

ب – لدينا $\begin{cases} \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 4 \\ -\frac{5}{3} \leqslant y \leqslant 2 \end{cases}$ إذن $-\frac{4}{3} \leqslant x + y \leqslant 6$

ومنه $x + y - 6 \leqslant 0$ و $x + y + \frac{4}{3} \geqslant 0$

إذن $F = |x + y - 6| + |x + y + \frac{4}{3}|$

$= -x - y + 6 + x + y + \frac{4}{3}$

ومنه $F = \frac{22}{3}$

تمرين 14 :

نعتبر العدد الحقيقي $A = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}}$

1 – بين أن : $A = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$

2 – إذا علمت أن :

$2,6 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 2,7$ و $1,7 \leqslant \sqrt{3} \leqslant 1,8$

فاعط تأطيرا للعدد A

الجواب :

1 – لدينا :

$(2\sqrt{7} - 3\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{7})^2 - 12\sqrt{21} + (3\sqrt{3})^2$

$= 28 - 12\sqrt{21} + 27$

$= 55 - 12\sqrt{21}$

وبالتالي $A = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$

2 – لدينا $\begin{cases} 2,6 < \sqrt{7} < 2,7 \\ 1,7 < \sqrt{3} < 1,8 \end{cases}$

إذن $5,2 < 2\sqrt{7} < 5,4$

$-5,4 < -3\sqrt{3} < -5,1$

ومنه $5,2 - 5,4 < 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} < 5,4 - 5,1$

وبالتالي $-0,2 < 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} < 0,3$

تمرين 15 :

ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث $2x^2 - 8 \leqslant 0$

و $|y - 1,25| \leqslant 25.10^{-2}$

1 – بين أن : $-2 \leqslant x \leqslant 2$

$1 \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}$

2 – حدد تأطيرا لكل من العددين $x^2 - y$ و xy



الجواب :

1 – لدينا $2x^2 - 8 \leqslant 0$ يعني $x^2 \leqslant \frac{8}{2}$

يعني $x^2 \leqslant 4$

يعني $|x| \leqslant 2$

يعني $-2 \leqslant x \leqslant 2$

لدينا $|y - 1,25| \leqslant 25.10^{-2}$

يعني $-25.10^{-2} < y - 1,25 < 25.10^{-2}$

$-25.10^{-2} + 1,25 < y < 1,25 + 25.10^{-2}$

يعني $-0,25 + 1,25 \leqslant y \leqslant 1,25 + 0,25$

يعني $1 \leqslant y \leqslant 1,5$

أي $\boxed{1 \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}}$

2 – لدينا $-2 \leqslant x \leqslant 2$

يعني $0 \leqslant x^2 \leqslant 2$

و $1 \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}$

يعني $-\frac{3}{2} \leqslant -y \leqslant -1$

ومنه $0 - \frac{3}{2} \leqslant x^2 - y \leqslant 2 - 1$

أي $\boxed{-\frac{3}{2} \leqslant x^2 - y \leqslant 1}$

لدينا $-2 \leqslant x \leqslant 2$ أي $0 \leqslant x \leqslant 2$

أو $-2 \leqslant x \leqslant 0$

الحالة 1 : $0 \leqslant x \leqslant 2$

ولدينا $1 \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}$

إذن $0 \leqslant xy \leqslant 3$

الحالة 2 : $-2 \leqslant x \leqslant 0$ أي $0 \leqslant -x \leqslant 2$

ولدينا $1 \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}$

إذن $0 \leqslant -xy \leqslant 3$

أي $-3 \leqslant xy \leqslant 0$

التأطير النهائي $\boxed{-3 \leqslant xy \leqslant 3}$

تمرين 16:

ليكن a من $\mathbb{R}$ نضع $E = 1 + \frac{3}{2}\left(a + \frac{a^2 - 2a}{6}\right)$

1 – بين أن : $E = \left(\frac{1}{2}a + 1\right)^2$

2 – نفترض أن : $-3 < a \leqslant -1$

بين أن : $\sqrt{E} \leqslant \frac{1}{2}$

3 – حدد قيمة a إذا علمت أن : $\sqrt{E} = \frac{1}{4}$

الجواب :

1 – لدينا $E = 1 + \frac{3}{2}a + \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}$

$= 1 + a + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2$

وبالتالي $E = \left(\frac{1}{2}a + 1\right)^2$

2 – لدينا $-3 < a \leqslant -1$

إذن $-\frac{3}{2} \leqslant \frac{1}{2}a \leqslant -\frac{1}{2}$

أي $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}a + 1 \leqslant \frac{1}{2}$

أي $\left|\frac{1}{2}a + 1\right| \leqslant \frac{1}{2}$ ومنه $\sqrt{E} \leqslant \frac{1}{2}$

3 – لدينا $\sqrt{E} = \frac{1}{4}$ يعني $\left|\frac{1}{2}a + 1\right| = \frac{1}{4}$



يعني $\frac{1}{2}a+1=\frac{1}{4}$ أو $\frac{1}{2}a+1=-\frac{1}{4}$

يعني $\frac{1}{2}a=-\frac{3}{4}$ أو $\frac{1}{2}a=-\frac{5}{4}$

يعني $a=-\frac{3}{2}$ أو $a=-\frac{5}{2}$

تمرين 17:

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا

1 – بين أن : $0<\sqrt{a+b}-\sqrt{a}<\frac{b\sqrt{a}}{2a}$

2 – استنتج مقارنة للعددين $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ و $\frac{\sqrt{5}}{5}$

اكاديمية تطوان 94

الجواب :

1 – لدينا $b>0$ إذن $a+b>a$

ومنه $\sqrt{a+b}>\sqrt{a}$

أي $0<\sqrt{a+b}-\sqrt{a}$

لدينا $\sqrt{a+b}-\sqrt{a}=\frac{a+b-a}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}$

$=\frac{b}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}<\frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}$

إذن $\sqrt{a+b}-\sqrt{a}<\frac{b}{2\sqrt{a}}=\frac{b\sqrt{a}}{2a}$

وبالتالي $0<\sqrt{a+b}-\sqrt{a}<\frac{b\sqrt{a}}{2a}$

2 – نضع $a=5$ و $b=2$

لدينا $a>0$ و $b>0$ إذن حسب السؤال 1

فإن $0<\sqrt{5+2}-\sqrt{2}<\frac{2\sqrt{5}}{2\times 5}$

وبالتالي $\sqrt{7}-\sqrt{2}<\frac{\sqrt{5}}{5}$

تمرين 18:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

(1 $1-\frac{2-x}{3}\leqslant\frac{2-x}{4}$

(2 $\frac{3x+4}{5}-\frac{3}{2}<\frac{x-1}{3}$

(3 $\frac{3}{4}-\left[1-3\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]\geqslant\frac{2-x}{4}$

(4 $\frac{0,1x-1}{4}-\frac{4+x}{5}>\frac{1-0,3x}{2}$

الجواب :

(1 $1-\frac{2-x}{3}\leqslant\frac{2-x}{4}$ يعني $\frac{3-2+x}{3}\leqslant\frac{2-x}{4}$

يعني $\frac{1+x}{3}\leqslant\frac{2-x}{4}$

يعني $4+4x\leqslant 6-3x$

يعني $4x+3x\leqslant 6-4$

يعني $7x\leqslant 2$

يعني $x\leqslant\frac{2}{7}$

وبالتالي $S=\left]-\infty,\frac{2}{7}\right]$

(2 لدينا $\frac{3x+4}{5}-\frac{3}{2}<\frac{x-1}{3}$

يعني $\frac{6x+8-15}{10}<\frac{x-1}{3}$

يعني $\frac{6x-7}{10}<\frac{x-1}{3}$

يعني $3(6x-7)<10(x-1)$

يعني $18x-21<10x-10$

يعني $18x-10x<21-10$

يعني $8x<11$



يعني $x < \frac{11}{8}$

وبالتالي $S =]-\infty , \frac{11}{8}[$

3) لدينا $\frac{3}{4} - [1 - 3(\frac{x+1}{2})] \geqslant \frac{2-x}{4}$

يعني $\frac{3}{4} - 1 + 3(\frac{x+1}{2}) \geqslant \frac{x}{3}$

يعني $-\frac{1}{4} + 3(\frac{x+1}{2}) \geqslant \frac{x}{3}$

يعني $-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \geqslant \frac{1}{3}x$

يعني $\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}x \geqslant -\frac{3}{2} + \frac{1}{4}$

يعني $\frac{7}{6}x \geqslant -\frac{5}{4}$

يعني $x \geqslant \frac{6}{7} \times \frac{-5}{4}$

يعني $x \geqslant \frac{-15}{14}$

وبالتالي $S = [\frac{-15}{14} , +\infty[$

4) لدينا $\frac{0,1x-1}{4} - \frac{4+x}{5} > \frac{1-0,3x}{2}$

يعني $\frac{0,5x - 5 - 16 - 4x}{20} > \frac{1-0,3x}{2}$

يعني $\frac{-3,5x-21}{20} > \frac{10-3x}{20}$

يعني $-3,5x - 21 > 10 - 3x$

يعني $-3,5x + 3x > 21 + 10$

يعني $-0,5x > 31$

يعني $x < \frac{-31}{0,5}$

يعني $x < -62$

وبالتالي $S =]-\infty , -62[$

تمرين 19:

حل في $\mathbb{R}$ مايلي :

1) $x + \frac{2x-1}{3} + \frac{5}{2} \geqslant \frac{5x+7}{3}$

2) $8 - 2[1 - (x+2)] \leqslant 10 + 2x$

3) $-3x + 4 > 9x + 24 - 4[2 + 3(x+1)]$

الجواب :

1) لدينا $x + \frac{2x-1}{3} + \frac{5}{2} \geqslant \frac{5x+7}{3}$

(نضرب الطرفين في 6)

يعني $6x + 4x - 2 + 15 \geqslant 10x + 14$

يعني $10x - 10x \geqslant 14 - 13$

يعني $0 \geqslant 1$ وهذا غير ممكن

إذن $S = \phi$

2) لدينا $8 - 2[1 - (x+2)] \leqslant 10 + 2x$

يعني $8 - 2 + 2x + 4 \leqslant 10 + 2x$

يعني $10 + 2x \leqslant 10 + 2x$

يعني $0 \leqslant 0$ وهذا دائما صحيح

وبالتالي $S = \mathbb{R}$

3) لدينا $-3x + 4 > 9x + 24 - 4[2 + 3(x+1)]$

يعني $-3x + 4 > 9x + 24 - 8 - 12x - 12$

يعني $-3x - 9x + 12x > 4 - 4$

يعني $0 > 0$ وهذا غير صحيح

وبالتالي $S = \phi$





تمرين 20:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

(1 $\frac{2}{x+4} \geqslant 3$

(2 $\frac{3x-2}{x+2} < 3$

(3 $\frac{2}{x-2} \geqslant \frac{1}{x+2}$

(4 $|2x-3| \geqslant |x+1|$

الجواب :

1) لدينا $\frac{2}{x+4} \geqslant 3$

مجموعة التعريف D :

$x \in D$ يعني $x+4 \neq 0$

يعني $x \neq -4$

وبالتالي $D = \mathbb{R} - \{-4\}$

المتراجحة تكافئ $\frac{2}{x+4} - 3 \geqslant 0$

يعني $\frac{2-3x-12}{x+4} \geqslant 0$

يعني $\frac{-3x-10}{x+4} \geqslant 0$

x	$-\infty$		-4		$-\frac{10}{3}$		$+\infty$
$-3x-10$		+		+	0	-	
$x+4$		-	0	+		+	
$\frac{-3x-10}{x+4}$		-	‖	+	0	-	

وبالتالي $S =]-4, -\frac{10}{3}]$

2) لدينا $\frac{3x-2}{x+2} < 3$

مجموعة التعريف D :

$x \in D$ يعني $x+2 \neq 0$

يعني $x \neq -2$

وبالتالي $D = \mathbb{R} - \{-2\}$

المتراجحة تكافئ $\frac{3x-2}{x+2} < 3$

يعني $\frac{3x-2-3x-6}{x+2} < 0$

يعني $\frac{-8}{x+2} < 0$

يعني $x+2 > 0$

يعني $x > -2$

وبالتالي $S =]-2, +\infty[$

3) لدينا $\frac{2}{x-2} \geqslant \frac{1}{x+2}$

مجموعة التعريف D :

$x \in D$ يعني $x-2 \neq 0$ و $x+2 \neq 0$

يعني $x \neq 2$ و $x \neq -2$

وبالتالي $D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

المتراجحة تكافئ $\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+2} \geqslant 0$

يعني $\frac{2x+4-x+2}{(x-2)(x+2)} \geqslant 0$

يعني $\frac{x+6}{(x-2)(x+2)} \geqslant 0$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$		-6		-2		2		$+\infty$
$x+6$		-	0	+		+		+	
$x-2$		-		-		-	0	+	
$x+2$		-		-	0	+		+	
$\frac{x+6}{(x-2)(x+2)}$		-	0	+	‖	-	‖	+	

وبالتالي : $S = [-6, -2[\cup]2, +\infty[$

4) لدينا $|2x-3| \geqslant |x+1|$

يعني $|2x-3| - |x+1| \geqslant 0$

لدينا

x	$-\infty$ -1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$\lvert 2x-3\rvert$	$-2x+3$	$-2x+3$	$2x-3$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert 2x-3\rvert - \lvert x+1\rvert$	$-x+4$	$-3x+2$	$x-4$

في المجال $]-\infty, -1]$

المتراجحة تكافئ $-x+4 \geqslant 0$

يعني $-x \geqslant -4$

يعني $x \leqslant 4$

ومنه $S_1 =]-\infty, 4] \cap]-\infty, -1]$
$=]-\infty, -1]$

في المجال $[-1, \frac{3}{2}]$

المتراجحة تكافئ $-3x+2 \geqslant 0$

يعني $-3x \geqslant -2$

يعني $x \leqslant \frac{2}{3}$

إذن $S_2 =]-\infty, \frac{2}{3}] \cap [-1, \frac{3}{2}]$
$= [-1, \frac{2}{3}]$

في المجال $[\frac{3}{2}, +\infty[$

المتراجحة تكافئ $x-4 \geqslant 0$

تعني $x \geqslant 4$

وبالتالي $S_3 = [\frac{3}{2}, +\infty[\cap [4, +\infty[$
$= [4, +\infty[$

الحل في $\mathbb{R}$ هو : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$
$=]-\infty, -1] \cup [-1, \frac{2}{3}] \cup [4, +\infty[$

$S =]-\infty, \frac{2}{3}] \cup [4, +\infty[$

تمرين 21:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $\frac{1}{x+2} \leqslant 1$

2) $\frac{3x+1}{x-2} < 2$

3) $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 \leqslant 0$

4) $\frac{1}{x+3} \geqslant \frac{2}{x+1}$

5) $\frac{4}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} \geqslant \frac{x+1}{x-1}$

الجواب :

1) لدينا $\frac{1}{x+2} \leqslant 1$

مجموعة التعريف $D = \mathbb{R} - \{-2\}$

المتراجحة تكافئ $\frac{1}{x+2} - 1 \leqslant 0$

يعني $\frac{1-x-2}{x+2} \leqslant 0$

يعني $\frac{-x-1}{x+2} \leqslant 0$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$-x-1$	+		+ 0	-
$x+2$	-	0	+	+
$\frac{-x-1}{x+2}$	-	‖	+ 0	-



وبالتالي $S = \left]-\infty , -2\right[\cup \left[-1 , +\infty\right[$

2) لدينا $\frac{3x+1}{x-2} < 2$

مجموعة التعريف D : $D = \mathbb{R} - \{2\}$

المتراجحة تكافئ $\frac{3x+1}{x-2} - 2 < 0$

يعني $\frac{3x+1-2x+4}{x-2} < 0$

يعني $\frac{x+5}{x-2} < 0$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$	-5		2	$+\infty$
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+5}{x-2}$	$+$	0	$-$	‖	$+$

وبالتالي $S = \left]-5 , 2\right[$

3) لدينا $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 \leq 0$

يعني $x^2(x+3) - 2(x+3) \leq 0$

يعني $(x+3)(x^2-2) \leq 0$

يعني $(x+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \leq 0$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$	-3		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-\sqrt{2}$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+\sqrt{2}$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

وبالتالي مجموعة الحلول هي :

$S = \left]-\infty , -3\right] \cup \left[-\sqrt{2} , \sqrt{2}\right]$

4) لدينا $\frac{1}{x+3} \geq \frac{2}{x+1}$

مجموعة التعريف D :

$x \in D$ يعني $x+3 \neq 0$ و $x+1 \neq 0$

يعني $x \neq -3$ و $x \neq -1$

وبالتالي $D = \mathbb{R} - \{-1 , -3\}$

المتراجحة تكافئ $\frac{1}{x+3} - \frac{2}{x+1} \leq 0$

يعني $\frac{x+1-2x-6}{(x+3)(x+1)} \leq 0$

يعني $\frac{-x-5}{(x+3)(x+1)} \leq 0$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$	-5		-3		-1	$+\infty$
$-x-5$	$+$	0	$-$		$-$		$-$
$x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{-x-5}{(x+3)(x+1)}$	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$

ومنه مجموعة الحلول هي :

$S = \left[-5 , -3\right[\cup \left]-1 , +\infty\right[$

5) لدينا $\frac{4}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} \geq \frac{x+1}{x-1}$

مجموعة التعريف D :

$x \in D$ يعني $x-1 \neq 0$ و $x+1 \neq 0$ و $x^2-1 \neq 0$

يعني $x \neq 1$ و $x \neq -1$ و $x \neq 1$

وبالتالي $D = \mathbb{R} - \{-1 , 1\}$

المتراجحة تكافئ $\frac{4}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} \geq \frac{x+1}{x-1}$

يعني $\frac{4}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} \geq 0$



يعني $\frac{4+x(x-1)-(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0$

يعني $\frac{4+x^2-x-x^2-2x-1}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0$

يعني $\frac{-3x+3}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0$

يعني $\frac{-3(x-1)}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0$

يعني $\frac{-3}{x+1} \geqslant 0$

يعني $x+1 < 0$

يعني $x < -1$

وبالتالي $S =]-\infty, -1[$

تمرين 22:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $\frac{x-1}{2x+3} < \frac{x+3}{2x-1}$

2) $\sqrt{x-1} < \sqrt{2x-1}$

3) $x-3 < \sqrt{x^2+1}$

الجواب :

1) مجموعة التعريف D :

$x \in D$ يعني $2x-1 \neq 0$ و $2x+3 \neq 0$

يعني $x \neq \frac{1}{2}$ و $x \neq -\frac{3}{2}$

وبالتالي $D = \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$

المتراجحة تكافئ $\frac{x-1}{2x+3} - \frac{x+3}{2x-1} < 0$

يعني $\frac{(x-1)(2x-1)-(x+3)(2x+3)}{(x+3)(x+1)} < 0$

يعني $\frac{2x^2-x-2x+1-2x^2-3x-6x-9}{(x+3)(x+1)} < 0$

يعني $\frac{-12x-8}{(2x+3)(2x-1)} < 0$

جدول الاشارات :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-12x-8$		+		+	0	-		-	
$2x+3$		-	0	+		+		+	
$2x-1$		-		-		-	0	+	
$\frac{-12x-8}{(2x+3)(2x+1)}$		+	‖	-	0	+	‖	-	

ومنه مجموعة الحلول هي :

$S =]-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$

2) لدينا $\sqrt{x-1} < \sqrt{2x-3}$

مجموعة التعريف D :

$x \in D$ يعني $x-1 \geqslant 0$ و $2x-3 \geqslant 0$

يعني $x \geqslant 1$ و $x \geqslant \frac{3}{2}$

ومنه $D = [\frac{3}{2}, +\infty[$

المتراجحة تكافئ $(\sqrt{x-1})^2 < (\sqrt{2x-3})^2$

يعني $x-1 < 2x-3$

يعني $x-2x < 1-3$

يعني $-x < -2$

يعني $x > 2$

وبالتالي مجموعة الحلول هي :

$S = [-\frac{3}{2}, +\infty[\cap]2, +\infty[$

$S =]2, +\infty[$

3) لدينا $x-3 < \sqrt{x^2+1}$



مجموعة التعريف D :

$x \in D$ يعني $x^2+1 \geqslant 0$ وهذا دائما صحيح

ومنه $D=\mathbb{R}$

إذا كان $x \leqslant 3$ فإن $x-3 \leqslant 0$

ويكون لدينا $x-3<\sqrt{x^2+1}$ لكل $x \leqslant 3$

إذن $S_1 =]-\infty , 3[$

إذا كان $x \geqslant 3$

فإن $x-3<\sqrt{x^2+1}$ تكافئ $(x-3)^2<x^2+1$

يعني $x^2-6x+9<x^2+1$

يعني $-6x<-8$

يعني $6x>8$

يعني $x>\frac{8}{6}$

يعني $x>\frac{4}{3}$

ومنه $S_2 =]\frac{4}{3} , +\infty[\cap [3 , +\infty[$

$= [3 , +\infty[$

الحل النهائي

$S = S_1 \cup S_2$

$=]+\infty , 3[\cap [3 , +\infty[$

إذن $S=\mathbb{R}$

تمرين 23:

حل في $\mathbb{R}$ مايلي :

1) $|x-2| \geqslant x$

2) $1-x<|x|$

3) $|x+1|-|x| \geqslant 0$

الجواب :

1) لدينا $|x-2| \geqslant x$

إذا كانت $x \geqslant 2$ المتراجحة تكافئ $x-2 \geqslant x$

يعني $-2 \geqslant 0$

وهذا غير ممكن ومنه $S_1=\phi$

إذا كانت $x \leqslant 2$ المتراجحة تكافئ $-x+2 \geqslant x$

يعني $-2x \geqslant -2$

يعني $x \leqslant 1$

وبالتالي $S_2 =]-\infty , 1] \cap]-\infty , 2]$

$=]-\infty , 1]$

الحل النهائي

$S = S_1 \cup S_2$

$=]-\infty , 1]$

2) لدينا $1-x<|x|$

الحالة 1 : $x \geqslant 0$ إذن $|x|=x$

المتراجحة تكافئ $1-x<x$

يعني $1<2x$

يعني $x>\frac{1}{2}$

ومنه $S_1 =]\frac{1}{2} , +\infty[\cap [0 , +\infty[$

$=]\frac{1}{2} , +\infty[$

الحالة 2 : $x \geqslant 0$ إذن $|x|=-x$

المتراجحة تكافئ $1-x<-x$

يعني $1<0$ وهذا غير ممكن

ومنه $S_2=\phi$

الحل النهائي

$S = S_1 \cup S_2$

$= \left]\frac{1}{2} , +\infty\right[$

3) لدينا $|x+1| - |x| \geqslant 0$

x	$-\infty$ -1	0	$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert x\rvert$	$-x$	$-x$	x
$\lvert x+1\rvert - \lvert x\rvert$	-1	$2x+1$	1

في المجال $\left]-\infty , -1\right[$

المتراجحة تكافئ $-1 \geqslant 0$ غير ممكن

إذن $S_1 = \phi$

في المجال $[-1 , 0]$

المتراجحة تكافئ $2x+1 \geqslant 0$

يعني $2x \geqslant -1$

يعني $x \geqslant -\frac{1}{2}$

وبالتالي $S_2 = \left[-\frac{1}{2} , +\infty\right[\cap [-1 , 0]$

$= \left[-\frac{1}{2} , 0\right]$

في المجال $\left[0 , +\infty\right[$

المتراجحة تكافئ $1 \geqslant 0$ وهذا صحيح لكل $x \in \left[0 , +\infty\right[$

إذن $S_3 = \left[0 , +\infty\right[$

الحل النهائي

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$= \phi \cup \left[-\frac{2}{3} , 0\right] \cup \left[0 , +\infty\right[$

$S = \left[-\frac{2}{3} , +\infty\right[$

تمرين 24:

حل وناقش في $\mathbb{R}$ حسب قيم البارامتر الحقيقي m.

(1 $mx - 2 \geqslant 0$

(2 $2(m-x) \geqslant m(1-x)$

الجواب :

1) لدينا $mx - 2 \geqslant 0$ يعني $mx \geqslant 2$

الحالة 1 : $m = 0$ المتراجحة تكافئ $0 \geqslant 2$ غير ممكن في هذه الحالة $S = \phi$

الحالة 2 : $m > 0$

المتراجحة تكافئ $x \geqslant \frac{2}{m}$

في هذه الحالة : $S = \left[\frac{2}{m} , +\infty\right[$

الحالة 3 : $m < 0$

المتراجحة تكافئ $mx \geqslant 2$

يعني $x \leqslant \frac{2}{m}$

في هذه الحالة $S = \left]-\infty , \frac{2}{m}\right[$

2) لدينا $2(m-x) \geqslant m(1-x)$

يعني $2m - 2x \geqslant m - mx$

يعني $-2x + mx \geqslant m - 2m$

يعني $(m-2)x \geqslant -m$

الحالة 1 : $m = 2$

المتراجحة تكافئ $0 \geqslant -2$ وهذا دائما صحيح

الحل في هذه الحالة $S = \mathbb{R}$

الحالة 2 : $m > 2$ أي $m - 2 > 0$





المتراجحة تكافئ $(m-2)x \geqslant -m$

يعني $x \geqslant \frac{-m}{m-2}$

يعني $x \geqslant \frac{m}{2-m}$

وبالتالي $S = \left]\frac{m}{2-m}, +\infty\right[$

الحالة 3 : $m < 2$ أي $m - 2 < 0$

المتراجحة تكافئ $(m-2)x \geqslant -m$

يعني $x \leqslant \frac{-m}{m-2}$

يعني $x \leqslant \frac{m}{2-m}$

وبالتالي $S = \left]-\infty, \frac{m}{2-m}\right[$

تمرين 25:

1) بين أن 0,4 تقريب للعدد $\frac{1}{3}$ إلى 10^{-1}

2) بين أن 0,14 تقريب للعدد $\frac{1}{7}$ إلى 5×10^{-3}

3) بين أن 1,16 تقريب للعدد $\frac{7}{6}$ إلى 10^{-2}

الجواب :

1) لنبين أن $\left|\frac{1}{3} - 0,4\right| < 10^{-1}$

لدينا $\left|\frac{1}{3} - 0,4\right| = \left|\frac{1}{3} - \frac{4}{10}\right|$

$= \left|\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right|$

$= \left|\frac{5-6}{15}\right|$

$= \frac{1}{15}$

لدينا $15 > 10$

إذن $\frac{1}{15} < \frac{1}{10}$

أي أن $\left|\frac{1}{3} - 0,4\right| < 10^{-1}$

ومنه 0,4 تقريب للعدد $\frac{1}{3}$ إلى 10^{-1}

2) لنبين أن $\left|\frac{1}{7} - 0,14\right| < 5\times10^{-3}$

لدينا $\left|\frac{1}{7} - 0,14\right| = \left|\frac{1}{7} - \frac{14}{100}\right|$

$= \left|\frac{1}{7} - \frac{7}{50}\right|$

$= \left|\frac{50-49}{350}\right|$

$= \frac{1}{350}$

لدينا $350 > 200$

إذن $\frac{1}{350} < \frac{1}{200}$

ومنه $\frac{1}{350} < 5\times10^{-3}$

إذن $\left|\frac{1}{7} - 0,14\right| < 5\times10^{-3}$

إذن 0,14 تقريب للعدد $\frac{1}{7}$ إلى 5×10^{-3}

3) لنبين أن $\left|\frac{7}{6} - 1,16\right| < 10^{-2}$

لدينا $\left|\frac{7}{6} - 1,16\right| = \left|\frac{7}{6} - \frac{116}{100}\right|$

$= \left|\frac{7}{6} - \frac{29}{25}\right|$

$= \left|\frac{175-174}{150}\right|$

$= \frac{1}{150}$

لدينا $150 > 100$

إذن $\frac{1}{150} < \frac{1}{100}$

أي أن $\frac{1}{150} < 10^{-2}$

ومنه $\left|\frac{7}{6} - 1,16\right| < 10^{-2}$

إذن العدد 1,16 تقريب للعدد $\frac{7}{6}$ إلى 10^{-2}



تمرين 26:

1) اعط تقريبا بإفراط للعدد $\frac{1}{3}$ إلى 8×10^{-2}

2) اعط تقريبا بتفريط للعدد $\frac{7}{6}$ إلى 5×10^{-4}

3) ليكن $a < x < b$

بين أن $\frac{a+b}{2}$ تقريب للعدد x إلى $\frac{b-a}{2}$.

الجواب :

1) لدينا $\frac{1}{3} \simeq 0,333.........$

إذن $0,33 < \frac{1}{3} < 0,41$

ومنه العدد 0,41 تقريب بإفراط للعدد $\frac{1}{3}$ إلى 8×10^{-2}

2) لدينا $\frac{7}{6} \simeq 1,6666.........$

إذن $1,6666 < \frac{7}{6} < 1,6671$

إذن العدد 1,6666 تقريب بتفريط للعدد $\frac{7}{6}$ إلى 5×10^{-4}

3) لدينا $a < x < b$

إذن $a - \frac{a+b}{2} < x - \frac{a+b}{2} < b - \frac{a+b}{2}$

$\frac{2a-a-b}{2} < x - \frac{a+b}{2} < \frac{2b-a-b}{2}$

أي أن $\frac{a-b}{2} < x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2}$

أي أن $-(\frac{b-a}{2}) < x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2}$

إذن $\left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}$

إذن العدد $\frac{a+b}{2}$ تقريب للعدد x إلى $\frac{b-a}{2}$.

تمرين 27:

ليكن x تقريب للعدد $\frac{2}{3}$ إلى 2×10^{-1}

1) بين أن $\frac{7}{15} < x < \frac{13}{15}$

2) حدد تأطيرا للعدد $\frac{x}{x-1}$

الجواب :

1) x تقريب للعدد $\frac{2}{3}$ إلى 2×10^{-1}

تعني أن $\left|\frac{2}{3} - x\right| < 2\times10^{-1}$

أي أن $-2\times10^{-1} < \frac{2}{3} - x < 2\times10^{-1}$

أي أن $-\frac{1}{5} < \frac{2}{3} - x < \frac{1}{5}$

اذن $-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} < -x < \frac{1}{5} - \frac{2}{3}$

اذن $\frac{-13}{15} < -x < \frac{-7}{15}$

أي أن $\frac{7}{15} < x < \frac{13}{15}$

2) لدينا $\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1}$

$= \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}$

$= 1 + \frac{1}{x-1}$

لدينا $\frac{7}{15} < x < \frac{13}{15}$

أي أن $\frac{7}{15} - 1 < x - 1 < \frac{13}{15} - 1$

أي أن $\frac{-8}{15} < x - 1 < \frac{-2}{15}$

اذن $\frac{-15}{2} < \frac{1}{x-1} < \frac{-15}{8}$

ومنه $1 - \frac{15}{2} < 1 + \frac{1}{x-1} < 1 - \frac{15}{8}$





ومنه $\frac{-13}{2} < \frac{x}{x-1} < \frac{-7}{8}$

تمرين 28:

نعتبر : 1 قيمة مقربة للعدد a إلى $\frac{3}{2}$

-1 قيمة مقربة للعدد b إلى $\frac{2}{3}$

1) أطر العددين a و b

2) أطر العددين a +b و $\frac{a}{b}$

الجواب :

1) لدينا 1 قيمة مقربة للعدد a إلى $\frac{3}{2}$

أي أن $|a - 1| < \frac{3}{2}$

أي أن $\frac{-3}{2} < a - 1 < \frac{3}{2}$

$\frac{-3}{2} + 1 < a < \frac{3}{2} + 1$

ومنه $\frac{-1}{2} < a < +\frac{5}{2}$

لدينا -1 قيمة مقربة للعدد b إلى $\frac{2}{3}$

أي أن $|b + 1| < \frac{2}{3}$

إذن $\frac{-2}{3} < b + 1 < \frac{2}{3}$

أي أن $\frac{-2}{3} - 1 < b < \frac{2}{3} - 1$

$\frac{-5}{3} < b < \frac{-1}{3}$

2) لدينا $\frac{-1}{2} < a < \frac{5}{2}$

$\frac{-5}{3} < b < \frac{-1}{3}$

إذن $\frac{-1}{2} - \frac{5}{3} < a + b < \frac{5}{2} - \frac{1}{3}$

إذن $\frac{-13}{6} < a + b < \frac{13}{6}$

لدينا $\frac{-5}{3} < b < \frac{-1}{3}$

إذن $-3 < \frac{1}{b} < \frac{-3}{5}$

و $\frac{3}{5} < -\frac{1}{b} < 3$

ولدينا $\frac{-1}{2} < a < \frac{5}{2}$

إذن $0 \leq a < \frac{5}{2}$ أو $\frac{-1}{2} < a \leq 0$

لدينا $\begin{cases} 0 \leq a < \frac{5}{2} \\ \frac{3}{5} < -\frac{1}{b} < 3 \end{cases}$ إذن $0 \leq -\frac{a}{b} < \frac{15}{2}$

إذن $\frac{-15}{2} < \frac{a}{b} \leq 0$

لدينا $\frac{-1}{2} < a \leq 0$ و $\frac{3}{5} < -\frac{1}{b} < 3$

إذن $0 \leq -a < \frac{1}{2}$ و $\frac{3}{5} < -\frac{1}{b} < 3$

إذن $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{3}{2}$

لدينا $\frac{-15}{2} < \frac{a}{b} \leq 0$ أو $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{3}{2}$

اذن $\frac{-15}{2} < \frac{a}{b} < \frac{3}{2}$

تمرين 29:

1) قارن العددين $2\sqrt{7}$ و $3\sqrt{3}$

2) احسب $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2$

3) نضع $X = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}}$ بسط X

4) علما أن $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$

و $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$

حدد تقريب للعدد x إلى 0,3



الجواب :

1) لدينا $(2\sqrt{7})^2 = 4 \times 7 = 28$

$(3\sqrt{3})^2 = 9 \times 3 = 27$

إذن $(2\sqrt{7})^2 > (3\sqrt{3})^2$

ومنه $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$

2) لدينا $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2$

$= (3\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{7})^2 - 2(3\sqrt{3})\times(2\sqrt{7})$

$= 27 + 28 - 12\sqrt{21}$

$= 55 - 12\sqrt{21}$

إذن $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2 = 55 - 12\sqrt{21}$

3) لدينا $= \sqrt{(55 - 12\sqrt{21})}$

$= \sqrt{(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2}$

$= |3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}|$

$= 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$

لأن $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}|$

اذن $X = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$

4) لدينا $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$

اذن $5,2 < 2\sqrt{7} < 5,4$

لدينا $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$

اذن $-5,4 < -3\sqrt{3} < -5,1$

ومنه $-0,2 < 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} < 0,3$

ومنه $-0,3 < 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} - 0,1 < -0,2$

اذن $-0,3 < X - 0,1 < 0,2 < 0,3$

اذن $-0,3 < X - 0,1 < 0,3$

أي أن $|X - 0,1| < 0,3$

اذن 0,1 تقريب للعدد X إلى 0,3

تمرين 30:

إذا علمت أن :

2,645 تقريب للعدد $\sqrt{7}$ إلى 5×10^{-3}

1,415 تقريب للعدد $\sqrt{2}$ إلى 5×10^{-3}

اعط تقريبا للعدد $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ إلى الدقة 10^{-2}

الجواب :

لدينا 2,645 تقريب للعدد $\sqrt{7}$ إلى 5×10^{-3}

اذن $|\sqrt{7} - 2,645| < 0,005$

أي أن $-0,005 < \sqrt{7} - 2,645 < 0,005$

اذن $+2,64 < \sqrt{7} < +2,65$

لدينا 1,415 تقريب للعدد $\sqrt{2}$ إلى 5×10^{-3}

اذن $|\sqrt{2} - 1,415| < 0,005$

أي أن $-0,005 < \sqrt{2} - 1,415 < 0,005$

اذن $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

ومنه $-1,42 < -\sqrt{2} < -1,41$

اذن $2,64 + (-1,42) < \sqrt{7} - \sqrt{2} < 2,65 + (-1,41)$

$1,22 < \sqrt{7} - \sqrt{2} < 1,42$

لدينا $\frac{1,22 + 1,24}{2} = 1,23$

اذن $-0,01 < (\sqrt{7} - \sqrt{2}) - 1,23 < 0,01$

اذن $|\sqrt{7} - \sqrt{2} - 1,23| < 0,01$



اذن $|\sqrt{7}-\sqrt{2}-1,23|<10^{-2}$

أي أن 1,23 تقريبا للعدد $\sqrt{7}-\sqrt{2}$ إلى 10^{-2}

تمرين 31:

ليكن x من $\mathbb{R}$ نضع $B=2x-2$

و $A=x^2-2x+2$

1) تحقق من أن $|A-B|=(x-2)^2$

2) نفترض أن x ينتمي إلى المجال $[1,9\,;2,1]$.

أ - أطر العدد $x-2$

ب - استنتج أن B تقريب للعدد A إلى 10^{-2}

الجواب :

1) لدينا $|A-B|=|x^2-2x+2-2x+2|$

$=|x^2-4x+4|$

$=|(x-2)^2|$

$=(x-2)^2$

إذن $|A-B|=(x-2)^2$

2) أ - لدينا $x\in[1,9\,;2,1]$

إذن $1,9<x<2,1$

ومنه $-0,1<x-2<0,1$

ب - لدينا $-0,1<x-2<0,1$

ومنه $0<(x-2)^2<0,01$

إذن $(x-2)^2<0,01$

أي أن $|A-B|<10^{-2}$

إذن B تقريب للعدد A إلى 10^{-2}

تمرين 32:

1) أ - بين أن لكل $a>0$; $\sqrt{a+5}<\sqrt{a}+\sqrt{5}$

ب - استنتج أن :

لكل a من المجال $]0,5[$

$0<(\sqrt{5}-\sqrt{a})<\frac{5-a}{\sqrt{5+a}}$

ليكن x من المجال $]4,5[$ بين أن $\frac{\sqrt{5}}{2}+1$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{x}$ إلى 2×10^{-2}

الجواب :

1) أ - لدينا $(\sqrt{a+5})^2=a+5$

$(\sqrt{a}+\sqrt{5})^2=5+a+2\sqrt{a}.\sqrt{5}$

إذن $(\sqrt{a+5})^2<(\sqrt{a}+\sqrt{5})^2$

ومنه $\sqrt{a+5}<(\sqrt{a}+\sqrt{5})$

لأن $\sqrt{a}+\sqrt{5}$ و $\sqrt{a+5}$ موجبان

ب - لدينا $0<a<5$

إذن $0<\sqrt{a}<\sqrt{5}$

اذن $\sqrt{a}<\sqrt{5}$ ومنه $\sqrt{5}-\sqrt{a}>0$ ①

لدينا $\sqrt{5}-\sqrt{a}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{a})(\sqrt{5}+\sqrt{a})}{\sqrt{5}+\sqrt{a}}$

$=\frac{5-a}{\sqrt{5}+\sqrt{a}}$

بما أن $\sqrt{a+5}<\sqrt{a}+\sqrt{5}$

فإن $\frac{1}{\sqrt{a+5}}>\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{5}}$

وبما أن $5-a>0$





فإن $\frac{5-a}{\sqrt{a}+5} > \frac{5-a}{\sqrt{a}+\sqrt{5}}$

إذن $\frac{5-a}{\sqrt{a}+5} > \sqrt{5}-\sqrt{a}$

أي أن $\sqrt{5}-\sqrt{a} < \frac{5-a}{\sqrt{a}+5}$ ②

من ① و② نستنتج أن :

$$0 < \sqrt{5}-\sqrt{a} < \frac{5-a}{\sqrt{a}+5}$$

2) لدينا $4 < x < 5$

إذن $2 < \sqrt{x} < \sqrt{5}$

أي أن $2-\frac{\sqrt{5}}{2}-1 < \sqrt{x}-(\frac{\sqrt{5}}{2}+1) < \sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{2}-1$

$$1-\frac{\sqrt{5}}{2} < \sqrt{x}-(\frac{\sqrt{5}}{2}+1) < \frac{\sqrt{5}}{2}-1$$

$$|\sqrt{x}-(\frac{\sqrt{5}}{2}+1)| < \frac{\sqrt{5}-2}{2}$$

حسب ① ب لدينا : نأخذ $a=4$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}-1 = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{2} < \frac{5-4}{2\times\sqrt{5}+4}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}-1 < \frac{1}{6} < \frac{1}{5}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}-1 < 2\times10^{-2}$$

$$|\sqrt{x}-(\frac{\sqrt{5}}{2}+1)| < 2\times10^{-2}$$

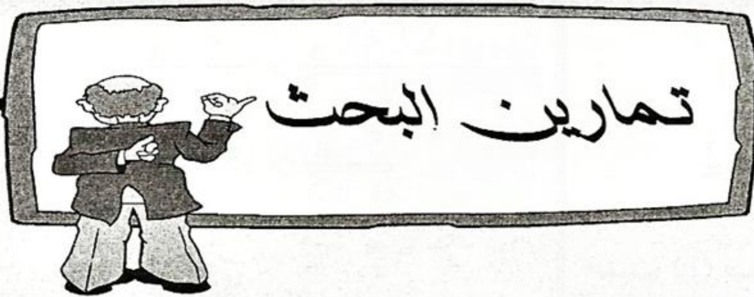
إذن $\frac{\sqrt{5}}{2}+1$ تقريب للعدد $\sqrt{x}$ إلى 2×10^{-2}











تمرين 1 :

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $|a+3| < 1$ و $1 < b < 3$

1) أ – بين أن : $-4 < a < -2$

ب – بين أن : $|a+b+1| < 2$

2) نعتبر العدد الحقيقي E بحيث $E = 2b - 3b + ab$

أ – تحقق أن : $E = (a+2)(b-3)+6$

ب – بين أن : $2 < E < 10$

تمرين 2 :

ليكن a و b عددين حقيقيين من $\mathbb{R}$ بحيث $2 < a < 3$ و $-1 < b < 2$

1) أطر العددين : ab و b^2

2) بين أن : $|ab + a - 4| < 5$

3) علما أن $-1 < b^2 + ab + c < 12$ اعط تأطيرا لـ c

تمرين 3 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات :

(1 $\big||3x+2| - 2\big| = 3$

(2 $|x-3| = |2-5x|$

(3 $|x-2| + |2x+1| = 2x - 3$

تمرين 4 :

ليكن a من $\mathbb{R}$ بحيث $4 < a < 5$

1) أثبت أن : $\frac{1}{|a+3|} < \frac{1}{7}$

2) استنتج أن : $\left|\frac{2a-1}{a+3} - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{7}|a-1|$ لكل $a \in [4,5]$



تمرين 5 :

1) نضع $A = \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}$

تحقق أن A عدد سالب

2 – أحسب A^2 ثم استنتج أن $A = -2$

3 – نضع $B = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$

أ – بين أن B سالب

ب – احسب B^2 استنتج قيمة B .

تمرين 6 :

1) ليكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $-2 < a < 3$ و $-1 < b < 2$ أطر الأعداد : a^2 و b^2 و ab

2) a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $|a| < \frac{1}{2}$ و $|b-2| < \frac{1}{2}$ بين أن $-5 < \frac{2b}{a-b} < -1$

3) ليكن العددين الحقيقيين a و b بحيث $|a| \leqslant 1$ و $|b| \leqslant 1$ و $ab = 1$ حدد العددين a و b

4) ليكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $0 < a < b$ قارن العددين $\frac{a}{1+\sqrt{b}}$ و $\frac{b}{1+\sqrt{a}}$

تمرين 7 :

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

(1 $\frac{5}{x^2-4} + \frac{3}{x+2} < \frac{1}{x-2}$

(2 $\frac{x+3}{2x+1} > 1$

(3 $\frac{1}{x^2-2x} < \frac{3}{x-2}$

تمرين 8 :

حل في $\mathbb{R}$ النظمة التالية :

(1 $\begin{cases} 3x - \frac{2}{3} \leqslant 10 - \frac{x}{3} \\ \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} \geqslant -\frac{1}{4} \end{cases}$

(2 $\begin{cases} 3x - 2 > 5(x-3) \\ 7x - 5 > 10x - 13 \end{cases}$

تمرين 9 :

حل وناقش تبعا لقيم m مايلي :

(1 $(2m-1)x < mx + \sqrt{2}$

(2 $(2-m^2)x - (m+\sqrt{2})m \leqslant 0$

تمرين 10 :

1) أ – بين أن $\sqrt{a+13} < \sqrt{a} + \sqrt{13}$ لكل a من $\mathbb{R}^{*+}$

ب – استنتج أن : $\frac{13-a}{\sqrt{a+13}} < \sqrt{13} - \sqrt{a} < 0$ لكل a من $]0\ ,13[$

2) ليكن x عددا حقيقيا بحيث $12 < x < 13$ أثبت أن $\left|\sqrt{x} - \frac{\sqrt{13}+\sqrt{12}}{2}\right| \leqslant 10^{-2}$

تمرين 11 :

1) ضع

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{10}$$

$$B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7}$$

بدون حساب الجدائين قارن A و B

2) ضع

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots\cdots \times \frac{99}{100}$$

$$B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots\cdots \times \frac{98}{99}$$

أ – بين أن : $A < B$

ب – استنتج أن : $A \leqslant \frac{1}{10} \leqslant B$

تمرين 12 :

a و b عددان حقيقيان حيث $-1 \leqslant a \leqslant 1$ و $-1 \leqslant b \leqslant 1$

1) أ – أطر $a - b$

ب – أطر $\frac{a-2}{b+3}$

2) أ – تحقق أن : $a^2 + a + 1 > 1$

ب – نضع $A = \frac{a}{a^2+a+1}$ بين أن $-1 \leqslant A \leqslant \frac{1}{3}$

3) نضع $B = \frac{b}{b^2+b+1}$ ونفترض أن $a < b$ قارن A و B

تمرين 13 :

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $1 < a < b$

نضع $A = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ و $B = \sqrt{a-1} - \sqrt{b+1}$

1) حدد إشارة كل من A و B

2) – أ – بين أن $\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{b+1}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ ثم استنتج أن $0 < \frac{A}{B} < 1$

ب – قارن العددين A و B

3) تطبيق : قارن العددين : $\sqrt{3} - \sqrt{6}$ و $\sqrt{2} - \sqrt{5}$



المعادلات و المتراجحات من الدرجة الثانية

- عدد الصفحات : [31]
- عدد التمارين : [23]
- عدد تمارين البحث : [12]





4 المعادلات والمتراجحات من الدرجة II

1) المعادلة $(E)\ ax^2 + bx + c = 0 : a \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة (E).

إذا كان: $\Delta < 0$ فإن : $S = \phi$

إذا كان: $\Delta = 0$ فإن : $S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

إذا كان: $\Delta > 0$ فإن : $S = \left\{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} , \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

2) تعميل الحدودية : $P(x) = ax^2 + bx + c$

إذا كان: $\Delta < 0$ فإنه لا يمكن تعميل الحدودية $P(x)$.

إذا كان: $\Delta = 0$ فإن : $P(x) = a(x - x_0)^2$

حيث $x_0 = \frac{-b}{2a}$

إذا كان: $\Delta > 0$ فإن : $P(x) = a(x - x_1) \times (x - x_2)$

حيث : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

3) مجموع وجداء الجذرين :

ليكن p و s من $\mathbb{R}$ حيث : $s^2 - 4p \geq 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1 \times x_2 = p \end{cases}$ تكافئ : x_1 و x_2 حلان للمعادلة : $t^2 - st + p = 0$

4) إشارة الحدودية : $P(x) = ax^2 + bx + c : a \neq 0$

إذا كان: $\Delta < 0$ فإن $P(x)$ لها إشارة a لكل x من $\mathbb{R}$

إذا كان: $\Delta = 0$ فإن $P(x)$ لها إشارة a لكل x من $\mathbb{R}$ ويخالف $\frac{-b}{2a}$

إذا كان: $\Delta > 0$ فإن جدول إشارة $P(x)$ هو كما يلي :

$x_1 < x_2$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
P(x)	إشارة a	0	إشارة (-a)	0	إشارة a

ملاحظة : حالة خاصة : المميز المختصر

إذا كان : $b = 2b'$ فإن : $\Delta' = b'^2 - ac$ يسمى المميز المختصر (E) ولدينا :

إذا كان : $\Delta' < 0$ فإن : $S = \phi$

إذا كان : $\Delta' = 0$ فإن : $S = \left\{\frac{-b'}{a}\right\}$

إذا كان : $\Delta' > 0$ فإن : $S = \left\{\frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}, \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}\right\}$

تمارين وحلولها

تمرين 1 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$2x^2 + 19 = 0$

$-3x^2 + 4x = 0$

$4x^2 - 15 = 0$

الجواب :

* لدينا : $2x^2 + 19 = 0$

أي أن $2x^2 = -19$

ومنه $x^2 = \frac{-19}{2}$

إذن $S = \phi$

* لدينا : $-3x^2 + 4x = 0$

أي أن $x(-3x + 4) = 0$

أي أن : $x = 0$ أو $-3x + 4 = 0$

ومنه : $x = 0$ أو $-3x = -4$

$x = 0$ أو $x = \frac{4}{3}$

$S = \left\{0, \frac{4}{3}\right\}$

* لدينا : $4x^2 - 15 = 0$

أي أن $4x^2 = 15$

$x^2 = \frac{15}{4}$

إذن $x = -\sqrt{\frac{15}{4}}$ أو $x = \sqrt{\frac{15}{4}}$

إذن $x = -\frac{\sqrt{15}}{2}$ أو $x = \frac{\sqrt{15}}{2}$

إذن $S = \left\{-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right\}$

تمرين 2 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$5x^2 + 9x - 2 = 0$

$8x^2 + 9x + 1 = 0$

$$x^2 - 2\sqrt{3} + 3 = 0$$

$$3x^2 + x + 2 = 0$$

الجواب :

* لدينا : $5x^2 + 9x - 2 = 0$

$\Delta = 9^2 - 4 . 5 . (-2)$

$= 81 + 40$

$= 121$

إذن $\sqrt{\Delta} = 11$

ومنه : $x = \frac{-9+11}{10}$ أو $x = \frac{-9-11}{10}$

أي أن $x = \frac{1}{10}$ أو $x = \frac{-20}{10}$

إذن $x = \frac{1}{10}$ أو $x = -2$

$S = \left\{-2 , \frac{1}{10}\right\}$

* لدينا : $8x^2 + 9x + 1 = 0$

$\Delta = 81 - 4 . 8 . 1$

$= 81 - 32$

$= 49$

إذن $\sqrt{\Delta} = 7$

ومنه : $x = \frac{-9-7}{16}$ أو $x = \frac{-9+7}{16}$

إذن $x = -1$ أو $x = \frac{-1}{8}$

$S = \left\{\frac{-1}{8} , -1\right\}$

* لدينا : $x^2 - 2\sqrt{3} . x + 3 = 0$

$\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 . 1 . 3$

$= 12 - 12$

$= 0$

إذن $\sqrt{\Delta} = 0$

إذن $x = \frac{2\sqrt{3}}{2}$ أي أن $x = \sqrt{3}$

$S = \left\{\sqrt{3}\right\}$

* لدينا : $3x^2 + x + 2 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 . 3 . 2$

$= 1 - 24$

$= -23 < 0$

إذن $S = \phi$

تمرين 3 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$4x^2 + 13x + 7 = 0$$

$$x^2 - 4\sqrt{2} . x + 8 = 0$$

$$x - \frac{6}{x} + 1 = 0$$

$$4 + \frac{5}{\ } + \frac{1}{\ } = 0$$

$$3x^2 + x + 2 = 0$$

$$\frac{x^3}{\ } + 2x^2 + 3x = 0$$

الجواب :

* لدينا : $4x^2 + 13x + 7 = 0$

$\Delta = (13)^2 - 4 . 4 . 7$

$= 169 - 112$

$= 57$

إذن $\sqrt{\Delta} = \sqrt{57}$

إذن : $x = \frac{-13 + \sqrt{57}}{8}$

أو $x = \frac{-13 - \sqrt{57}}{8}$

$$S = \left\{ \frac{-13 + \sqrt{57}}{8} , \frac{-13 - \sqrt{57}}{8} \right\}$$

* لدينا : $x^2 - 4\sqrt{2} \ . x + 8 = 0$

$\Delta = (-4\sqrt{2})^2 - 4 \ . \ 1 \ . \ 8$

$= 32 - 32$

$= 0$

إذن $\sqrt{\Delta} = 0$

إذن $x = \frac{-b}{2a}$

إذن $x = \frac{4\sqrt{2}}{2}$

أي أن $x = 2\sqrt{2}$

و $S = \{2\sqrt{2}\}$

* لدينا : $(E) : \ x - \frac{6}{x} + 1 = 0$

$D_E = \mathbb{R}^*$

(E) تكافئ : $\frac{x^2 - 6 + x}{x} = 0$

أي أن $x^2 + x - 6 = 0$

إذن $\Delta = 25$

ومنه : $x = \frac{-1 + 5}{2}$ أو $x = \frac{-1 - 5}{2}$

إذن $x = -3$ أو $x = 2$

ومنه $S = \{-3 , 2\}$

لدينا $(E') : \ 4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$D_{E'} = \mathbb{R}^*$

(E') تكافئ : $4x^2 + 5x + 1 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$\sqrt{\Delta} = 3$

ومنه : $x = \frac{-5 - 3}{8}$ أو $x = \frac{-5 + 3}{8}$

إذن $x = -1$ أو $x = \frac{-1}{4}$

$$S = \left\{ -1 , \frac{-1}{4} \right\}$$

* لدينا : $\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x = 0$

تكافئ $x\left(\frac{x^2}{3} + 2x + 3\right) = 0$

أي أن $\frac{x^2}{3} + 2x + 3 = 0$ أو $x = 0$

تكافئ $x^2 + 6x + 9 = 0$ أو $x = 0$

تكافئ $(x + 3)^2 = 0$ أو $x = 0$

أي أن $x + 3 = 0$ أو $x = 0$

إذن $x = -3$ أو $x = 0$

و $S = \{0 , -3\}$

تمرين 4 : باستعمال المميز المختصر

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$3x^2 - 14x + 8 = 0$

$x^2 - 2\sqrt{3} \ . x - 9 = 0$

$4x^2 - 28x + 49 = 0$

الجواب :

* لدينا : $3x^2 - 14x + 8 = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac$

$\Delta' = 7^2 - 3 \times 8$

$= 49 - 24$

$= 25$

إذن $\sqrt{\Delta'} = 5$

إذن : $x = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{7+5}{3}$

أو $x = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{7-5}{3}$

أي أن $x = \frac{12}{3}$ أو $x = \frac{2}{3}$

إذن $x = 4$ أو $x = \frac{2}{3}$

$S = \left\{ \frac{2}{3} , 4 \right\}$

* لدينا $x^2 - 2\sqrt{3} \cdot x - 9 = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac$

$= \sqrt{3}^2 - 1 \times (-9)$

$= 12$

إذن $\sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{3}$

إذن : $x = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{1}$

أو $x = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{1}$

أي أن $x = 3\sqrt{3}$ أو $x = -\sqrt{3}$

$S = \left\{ -\sqrt{3} , 3\sqrt{3} \right\}$

* لدينا $4x^2 - 28x + 49 = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac$

$\Delta' = (-14)^2 - 4 \cdot 49$

$= 196 - 196$

$= 0$

إذن $x = -\frac{(-14)}{4}$

$= \frac{14}{}$

$= \frac{7}{2}$

ومنه $S' = \left\{ \frac{7}{2} \right\}$

تمرين 5 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$x^2 - (1 + \sqrt{5})\, x + \sqrt{5} = 0$

$x^2 + (3 + \sqrt{2})\, x + 3\sqrt{5} = 0$

$x^2 + (2\sqrt{2} - 3)\, x - 6\sqrt{2} = 0$

$x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)\, x + \sqrt{3}(\sqrt{2} - 1) = 0$

الجواب :

* لدينا $x^2 - (1 + \sqrt{5})\, x + \sqrt{5} = 0$

لدينا $\Delta = (1 + \sqrt{5})^2 - 4 \cdot 1 . \sqrt{5}$

$= 1^2 + \sqrt{5}^2 + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$

$= 1^2 + \sqrt{5}^2 - 2\sqrt{5}$

$= (1 - \sqrt{5})^2$

إذن $\sqrt{\Delta} = \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2}$



$=|1-\sqrt{5}|$

$=\sqrt{5}-1$

إذن : $x=\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{5}-1}{2}$

أو $x=\frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{5}+1}{2}$

أي ان $x=\sqrt{5}$ أو $x=1$

$S=\{1,\sqrt{5}\}$

* لدينا $x^2+(3+\sqrt{2})x+3\sqrt{5}=0$

$\Delta=(3+\sqrt{2})^2-4.1.3\sqrt{2}$

$=3^2+\sqrt{2}^2+6\sqrt{2}-12\sqrt{2}$

$=3^2+\sqrt{2}^2-6\sqrt{2}$

$=(3-\sqrt{2})^2$

إذن $\sqrt{\Delta}=\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}$

$=|3-\sqrt{2}|$

$=3-\sqrt{2}$

إذن : $x=\frac{-3-\sqrt{2}-3+\sqrt{2}}{2}$

أو $x=\frac{-3-\sqrt{2}+3-\sqrt{2}}{2}$

أي ان $x=-3$ أو $x=-\sqrt{2}$

$S=\{-3,-\sqrt{2}\}$

* لدينا $x^2+(2\sqrt{2}-3)x-6\sqrt{2}=0$

$\Delta=(2\sqrt{2}-3)^2-4.1.(-6\sqrt{2})$

$=(2\sqrt{2})^2+9-12\sqrt{2}+24\sqrt{2}$

$=(2\sqrt{2})^2+3^2+12\sqrt{2}$

$=(2\sqrt{2}+3)^2$

إذن : $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{2}+3$

$x=\frac{-2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}-3}{2}$

أو $x=\frac{-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}+3}{2}$

أي ان $x=-2\sqrt{2}$ أو $x=3$

و $S=\{-2\sqrt{2},3\}$

* لدينا :

$x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)x+\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)=0$

$\Delta=(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)^2-4\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)$

$=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-1)^2+2\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)-4\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)$

$=(\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{2})^2-2\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)^2$

إذن : $\sqrt{\Delta}=|\sqrt{3}-\sqrt{2}+1|$

$=\sqrt{3}-\sqrt{2}+1$

إذن : $x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2}$

أو $x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}$

أي ان $x=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}$ أو $x=\frac{2\sqrt{3}}{2}$

أي ان $x=\sqrt{2}-1$ أو $x=\sqrt{3}$

$S=\{\sqrt{3},\sqrt{2}-1\}$

تمرين 6 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$(3x-1)^2-(2x-1)^2-1=0$$

$$\frac{x+2}{x}+2=\frac{x}{x-2}$$

$$\frac{x+1}{x}+1=\frac{x}{x-1}$$

$$\frac{3x+2}{x+1}-\frac{x-3}{x-1}=\frac{5}{3}$$

الجواب :

* لدينا $(3x-1)^2-(2x-1)^2-1=0$

أي أن

$$9x^2-6x+1-4x^2+4x-1-1=0$$

يعني أن $5x^2-2x-1=0$

$$\Delta'=1^2-5(-1)$$

$$=6$$

$$\sqrt{\Delta'}=\sqrt{6}$$

إذن : $x=\frac{1-\sqrt{6}}{5}$ أو $x=\frac{1+\sqrt{6}}{5}$

و $S=\left\{\frac{1+\sqrt{6}}{5},\frac{1-\sqrt{6}}{5}\right\}$

* لدينا $(E):\ \frac{x+2}{x}+2=\frac{x}{x-2}$

$x\in D_E$ تعني أن $x\in\mathbb{R}$ و $x\neq 0$ و $x-2\neq 0$

أي أن $x\in\mathbb{R}$ و $x\neq 0$ و $x\neq 2$

إذن $D_E=\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$

(E) تكافئ : $\frac{x+2+2x}{x}=\frac{x}{x-2}$

أي أن $\frac{3x+2}{x}=\frac{x}{x-2}$

أي أن $(x-2)(3x+2)=x.x$

$$3x^2+2x-6x-4=x^2$$

يعني أن $2x^2-4x-4=0$

أي ان $x^2-2x-2=0$

$$\Delta'=1-1.(-2)$$

$$=3$$

$$\sqrt{\Delta'}=\sqrt{3}$$

إذن : $x=\frac{1-\sqrt{3}}{1}$ أو $x=\frac{1+\sqrt{3}}{1}$

$$S=\{\sqrt{3}-1,1+\sqrt{3}\}$$

* لدينا $(E'):\ \frac{x+1}{x}+1=\frac{x}{x-1}$

$x\in D_{(E')}$ تعني أن $x\in\mathbb{R}$ و $x\neq 0$ و $x\neq 1$

$$D_{E'}=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$

(E') تكافئ : $\frac{x+1+x}{x}=\frac{x}{x-1}$

أي أن $\frac{2x+1}{x}=\frac{x}{x-1}$

أي أن $(x-1)(2x+1)=x^2$

$$2x^2+x-2x-1=x^2$$

يعني أن $x^2-x-1=0$

لدينا $\Delta=1+4$

$$=5$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$$



إذن : $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ أو $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$S = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2} \;,\; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

* لدينا $(E'') : \frac{3x+2}{x+1} - \frac{x-3}{x-1} = \frac{5}{3}$

$x \in D_{(E'')}$ تعني أن $x \in \mathbb{R}$ و $x \neq 1$ و $x \neq -1$

$$D_{E''} = \mathbb{R} \setminus \{-1 \;,\; 1\}$$

(E'') تكافئ :

$$\frac{(3x+2)(x-1)-(x-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{3}$$

أي أن

$$\frac{3x^2-x-2-x^2+2x+3}{x^2-1} = \frac{5}{3}$$

$$3(2x^2+x+1) = 5(x^2-1)$$

يعني أن $6x^2+3x+3 = 5x^2-5$

يعني أن $x^2+3x+8=0$

$$\Delta = 9-32 = -23 < 0$$

إذن $S = \phi$

تمرين 7 :

① - أ - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية :

$$2x^2-3x-2=0$$

ب - استنتج حلول المعادلتين التاليتين :

$$2x^2-3|x|-2=0$$

$$2x-3\sqrt{x}-2=0$$

② - أ - حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين :

$x^2+x-6=0$ و $x^2-x-2=0$

ب - استنتج حلول المعادلة :

$$x^2-|x-2|-4=0$$

الجواب :

① - أ -لدينا : $2x^2-3x-2=0$

$$\Delta = 9+36$$
$$= 25$$

إذن $\sqrt{\Delta} = 5$

ومنه $x = \frac{3+5}{4}$ أو $x = \frac{3-5}{4}$

إذن $x = 2$ أو $x = \frac{-1}{2}$

و $S = \left\{\frac{-1}{2}, 2\right\}$

ب -

لدينا : $2x^2-3|x|-2=0$

نضع $X = |x|$

إذن $2x^2-3|x|-2=0$

تكافئ : $2|x|^2-3|x|-2=0$

أي أن $2X^2-3X-2=0$

أي أن $X = 2$ أو $X = \frac{-1}{2}$

تعني أن $|x| = 2$ أو $|x| = \frac{-1}{2}$ لا يمكن

إذن $x = 2$ أو $x = -2$

$$S = \{-2 , 2\}$$

لدينا $(E) : 2x-3\sqrt{x}-2=0$

$$D_E = \mathbb{R}^+$$

(E) تكافئ : $2(\sqrt{x})^2-3\sqrt{x}-2=0$

لنضع $X = \sqrt{x}$

إذن (E) تصبح : $2X^2 - 3X - 2 = 0$

وحسب أ) فإن :

$X = \frac{-1}{2}$ أو $X = 2$

أي أن $\sqrt{x} = 2$ أو $\sqrt{x} = \frac{-1}{2}$ لا يمكن

إذن $\sqrt{x}^2 = 2^2$ أو $x = 4$

$S = \{4\}$

② - أ - $x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 8$

$= 9$

إذن $\sqrt{\Delta} = 3$

ومنه $x = \frac{1+3}{2}$ أو $x = \frac{1-3}{2}$

إذن $x = 2$ أو $x = -1$

$S = \{-1 , 2\}$

لدينا $x^2 + x - 6 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 . 1 (-6)$

$= 25$

إذن $\sqrt{\Delta} = 5$

$x = \frac{-1-5}{2}$ أو $x = \frac{-1+5}{2}$

إذن $x = -3$ أو $x = 2$

$S = \{-3 , 2\}$

ب - لدينا $(E') : x^2 - |x - 2| - 4 = 0$

لدينا :

x	$-\infty$	2 $+\infty$
$\lvert x - 2\rvert$	$-x + 2$	$x - 2$

إذا كان : $x \geqslant 2$ فإن (E') تصبح :

$x^2 - (x - 2) - 4 = 0$

أي أن $x^2 - x - 2 = 0$

إذن حسب أ) :

$x = 2$ أو $x = -1$

$S_1 = \{2\}$

لأن (-1) لا يحقق الشرط $x \geqslant 2$

إذا كان : $x < 2$ فإن (E') تصبح :

$x^2 - (-x + 2) - 4 = 0$

أي أن $x^2 + x - 6 = 0$

إذن حسب أ) :

$x = 2$ أو $x = -3$

$S_2 = \{-3\}$

وبالتالي : $S = S_1 \cup S_2$

إذن $S = \{-3 , 2\}$

تمرين 8 :

حل في R المعادلات التالية :

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$3x^4 - 13x^2 + 4 = 0$

$x^3 - 5x^2 = 6x$

$x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$

$5x^2 + 14|x| - 3 = 0$

$x + 3\sqrt{x-3} - 1 = 0$

الجواب :

* لدينا $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

نضع : $X = x^2$

إذن $x^2 - 3x^2 - 4 = 0$ تكافئ :

$X^2 - 3X - 4 = 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$

$\sqrt{\Delta} = 5$

$X = \frac{3+5}{2}$ أو $X = \frac{3-5}{2}$

أي أن $X = 4$ أو $X = -1$

وبما أن $X = x^2$ فإن :

$x^2 = 4$ أو $x^2 = -1$

$x = 2$ أو $x = -2$ أو لايمكن

$S = \{-2 , 2\}$

* لدينا $3x^4 - 13x^2 + 4 = 0$

نضع : $X = x^2$

تكافئ : $3x^4 - 13x^2 + 4 = 0$

$3X^2 - 13X + 4 = 0$

$\Delta = (-13)^2 - 4 \times 3 \times 4$

$= 121 > 0$

$\sqrt{\Delta} = 11$

إذن $X = \frac{13-11}{6}$ أو $X = \frac{13+11}{6}$

$X = \frac{1}{3}$ أو $X = 4$

أي أن $x^2 = \frac{1}{3}$ أو $x^2 = 4$

أي أن $x^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ أو $x^2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

أو $x = -2$ أو $x = 2$

إذن $S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3} , \frac{\sqrt{3}}{3} , -2 , 2\right\}$

* لدينا $x^3 - 5x^2 = 6x$

تكافئ $x^3 - 5x^2 - 6x = 0$

أي أن $x(x^2 + 5x - 6) = 0$

إذن $x^2 + 5x - 6 = 0$ أو $x = 0$

$\Delta = 25 + 24 = 49 > 0$

$\sqrt{\Delta} = 7$

$x = \frac{-5+7}{2}$ أو $x = \frac{-5-7}{2}$

أي أن $x = 1$ أو $x = -6$

إذن $S = \{0, -6 , 1\}$

* لدينا $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$

لنضع $X = \sqrt{x}$

إذن $X^2 = x$

ومنه $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$

تكافئ : $X^2 + 3X - 10 = 0$

$\Delta = 9 + 40 = 49$

$\sqrt{\Delta} = 7$

$X = \frac{-3+7}{2}$ أو $X = \frac{-3-7}{2}$

أي أن $X = 2$ أو $X = -5$

بما أن $X = \sqrt{x}$

فإن $\sqrt{x} = 2$ أو $\sqrt{x} = -5$

$x = 4$ أو لا يمكن

إذن $S = \{4\}$

* لدينا $5x^2 + 14|x| - 3 = 0$

نضع $X = |x|$

إذن $X^2 = x^2$

إذن $5x^2 + 14|x| - 3 = 0$

تكافئ $5X^2 + 14X - 3 = 0$

$\Delta' = 7^2 - 5 \times (-3)$

$= 49 + 15$

$= 64 > 0$

$\sqrt{\Delta'} = 8$

$X = \frac{-7+8}{5}$ أو $X = \frac{-7-8}{5}$

أي أن $X = \frac{1}{5}$ أو $X = -3$

ومنه $|x| = \frac{1}{5}$ أو $|x| = -3$ لا يمكن

إذن $x = \frac{1}{5}$ أو $x = -\frac{1}{5}$

$S = \left\{-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right\}$

* لدينا $x + 3\sqrt{x-3} - 1 = 0$

لنضع $X = \sqrt{x-3}$

إذن $X^2 = x - 3$

أي أن $x = X^2 + 3$

ومنه $x + 3\sqrt{x-3} - 1 = 0$

تكافئ : $X^2 + 3 + 3X - 1 = 0$

أي $X^2 + 3X + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$

$X = \frac{-3+1}{2}$ أو $X = \frac{-3-1}{2}$

$X = -1$ أو $X = -2$

أي أن $\sqrt{x-3} = -1$ أو $\sqrt{x-3} = -2$

لايمكن لايمكن

إذن $S = \phi$

تمرين 9 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$3x \times |x+1| + x - 2 = 0$

$\frac{x(x^2-4)}{|x-2|} = 2$

$2x\,|x-1| - |x-2| = 0$

الجواب :

* لدينا $(E) : 3x \times |x+1| + x - 2 = 0$

إذا كان : $x \geqslant -1$ فإن :

$|x+1| = x + 1$

ومنه (E) تصبح :

$3x\,(x+1) + x - 2 = 0$

تكافئ : $3x^2 + 4x - 2 = 0$

$\Delta' = 4 + 2 \times 3$

$= 10 > 0$

إذن : $x = \frac{-2 - \sqrt{10}}{3}$ أو $x = \frac{-2 + \sqrt{10}}{3}$

$S_1 = \left\{ \frac{-2 + \sqrt{10}}{3} \right\}$

إذا كان : $x \leqslant -1$ فإن :

$|x + 1| = -x - 1$

ومنه (E) تصبح :

$3x(-x - 1) + x - 2 = 0$

تكافئ : $-3x^2 - 2x - 2 = 0$

$\Delta' = 1 - 6$

$= -5 < 0$

إذن $S_1 = \phi$

وبالتالي : $S = S_1 \cup S_2$

إذن $S = \left\{ \frac{-2 + \sqrt{10}}{3} \right\}$

* لدينا $(E') : \frac{x(x^2 - 4)}{|x + 2|} = 2$

لدينا $D_{E'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

إذا كان : $x > 2$ فإن : (E') تصبح :

$\frac{x(x^2 - 4)}{x - 2} = 2$

أي أن : $x(x + 2) = 2$

$x^2 + 2x - 2 = 0$

$\Delta' = 1 + 2$

$= 3$

إذن : $x = -1 - \sqrt{3}$ أو $x = -1 + \sqrt{3}$

$S_1 = \phi$

إذا كان $x < 2$ فإن (E') تصبح :

$\frac{x(x^2 - 4)}{-(x - 2)} = 2$

تكافئ : $x(x + 2) = -2$

$x^2 + 2x + 2 = 0$

$\Delta' = 1 - 2 = -1 < 0$

إذن $S_2 = \phi$

ومنه $S = S_1 \cup S_2$

$= \phi$

$S = \phi$

*لدينا : $(E'') : 2x|x - 1| - |x - 2| = 0$

لدينا :

x	$-\infty$ 1	1 2	2 $+\infty$
x - 1	-x+1	x - 1	x - 1
x - 2	-x+2	-x+2	x - 2

حسب هذا الجدول :لدينا ثلاث حالات :

إذا كان : $x \leqslant 1$ فإن (E'') تصبح :

$2x(-x + 1) - (-x + 2) = 0$

تكافئ : $-2x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Delta = 9 - 4(-2)(-2)$

$= 9 - 16$

$= -7 < 0$

إذن $S_1 = \phi$

إذا كان : $1 < x \leqslant 2$ فإن (E'') تصبح :

$$2x(x-1)-(-x+2)=0$$

تكافئ : $2x^2 - x - 2 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 \times 2(-2)$$
$$= 17$$

$x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$ أو $x = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$

$$S_2 = \left\{ \frac{1+\sqrt{17}}{4} \right\}$$

إذا كان : $x > 2$ فإن : (E'') تصبح :

$$2x(x-1)-(x-2)=0$$

أي أن : $2x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 . 2 . 2$$
$$= -7 < 0$$

$$S_3 = \phi$$

وبالتالي : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$$= \left\{ \frac{1+\sqrt{17}}{4} \right\}$$

إذن $S = \left\{ \frac{1+\sqrt{17}}{4} \right\}$

تمرين 10 :

1 - أ - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية :

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

ب - استنتج حلول المعادلتين التاليتين :

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

$$x - 2\sqrt{x} - 8 = 0$$

2 - أ - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$x^2 - 7x - 8 = 0$$

ب - استنتج حلول المعادلة :

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0$$

الجواب :

1 - أ -لدينا : $x^2 - 2x - 8 = 0$

لدينا : $\Delta' = (-1)^2 - 1 \times (-8)$

$$= 9 > 0$$

$x = \frac{1-3}{1}$ أو $x = \frac{1+3}{1}$

$x = -2$ أو $x = 4$

$$S = \{-2 , 4\}$$

ب - لدينا : $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

لنضع $X = x^2$

إذن $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ تكافئ :

$$X^2 - 2X - 8 = 0$$

وحسب 1) أ - فإن :

$X = -2$ أو $X = 4$

أي أن : $x^2 = -2$ أو $x^2 = 4$

لايمكن

$x = -2$ أو $x = 2$

$$S = \{-2 , 2\}$$

* لدينا : $x - 2\sqrt{x} - 8 = 0$

لنضع $X = \sqrt{x}$

إذن $X^2 = x$

ومنه $x - 2\sqrt{x} - 8 = 0$ تكافئ :

$X^2 - 2X - 8 = 0$

وحسب 1) أ - فإن :

$X = 4$ أو $X = -2$

أي أن : $\sqrt{x} = 4$ أو $\sqrt{x} = -2$

$x = 16$ لايمكن

$S = \{16\}$

2 - أ - لدينا $x^2 - 7x - 8 = 0$

$\Delta = 49 - 4 \times 1 (-8)$

$= 81$

$\sqrt{\Delta} = 9$

$x = \frac{7+9}{2}$ أو $x = \frac{7-9}{2}$

أي أن $x = 8$ أو $x = -1$

$S = \{8 , -1\}$

ب - لدينا : $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

لنضع $X = x^3$

إذن $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ تكافئ :

$X^2 - 7X - 8 = 0$

وحسب 2) أ - فإنه :

$X = 8$ أو $X = -1$

أي أن : $x^3 = 8$ أو $x^3 = -1$

$x^3 = 2^3$ أو $x^3 = (-1)^3$

$x = 2$ أو $x = -1$

$S = \{-1 , 2\}$

تمرين 11 :

عمل ما يلي :

$P(x) = 3x^2 - x - 10$

$Q(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$

$R(x) = 3x^2 + x(1 - 3\sqrt{2}) - \sqrt{2}$

الجواب :

* لدينا : $P(x) = 3x^2 - x - 10$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3(-10)$

$= 121 > 0$

$\sqrt{\Delta} = 11$

إذن $x_2 = \frac{1-11}{6}$ أو $x_1 = \frac{1+11}{6}$

$x_2 = \frac{-5}{3}$ أو $x_1 = 2$

ومنه $P(x) = 3(x - 2)(x + \frac{5}{3})$

$= 3(x + \frac{5}{3})(x - 2)$

إذن $\boxed{P(x) = (3x + 5)(x - 2)}$

* لدينا : $Q(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \left(\frac{1}{4}\right)$

$= 1 - 1$

$= 0$

إذن : $x = -\frac{1}{2}$.

إذن : $Q(x) = 1 \times \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

$$\boxed{Q(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$$

* لدينا $R(x) = 3x^2 + x(1 - 3\sqrt{2}) - \sqrt{2}$

$\Delta = (1 - 3\sqrt{2})^2 + 4 \times 3 \times \sqrt{2}$

$= 1^2 - 6\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 + 12\sqrt{2}$

$= 1^2 + 6\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2$

$= (1 + 3\sqrt{2})^2$

$\sqrt{\Delta} = 1 + 3\sqrt{2}$

$x_1 = \frac{1 + 3\sqrt{2} + 1 + 3\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2}$

و $x_2 = \frac{-1 + 3\sqrt{2} - 1 - 3\sqrt{2}}{6} = -\frac{1}{3}$

إذن $R(x) = 3\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

$= 3\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$

$= \left(3x + 1\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$

إذن

$$\boxed{R(x) = (3x + 1)(x - \sqrt{2})}$$

تمرين 12 :

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$x^2 + x + 2 \geqslant 0$

$2x^2 - 17x + 21 < 0$

$3x^2 - x - 2 \geqslant 0$

$x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 12 \leqslant 0$

$-5x^2 + 2\sqrt{5}\,x + 4 \geqslant 0$

الجواب :

* لدينا : $x^2 + x + 2 \geqslant 0$

$\Delta = 1^2 - 4 . 2 \times 1$

$= -7 < 0$

إذن : $S = \mathbb{R}$

* لدينا : $2x^2 - 17x + 21 < 0$

$\Delta = (-17)^2 - 4 \times 2 \times 21$

$= 121 > 0$

$\sqrt{\Delta} = 11$

إذن $x = \frac{17 - 11}{6}$ أو $x = \frac{17 - 11}{6}$

$x = \frac{3}{2}$ أو $x = 7$

إذن

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		7		$+\infty$
$2x^2-17x+21$		+	0	-	0	+	

$S = \left]\frac{3}{2}, 7\right[$

* لدينا $3x^2 - x - 2 \geqslant 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-2)$

$= 25$

$\sqrt{\Delta} = 5$

إذن $x = \frac{1 - 5}{6}$ أو $x = \frac{1 + 5}{6}$

$x = -\frac{2}{3}$ أو $x = 1$

تمرين 13 :

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$$\frac{x+2}{x^2+3x-4} \leqslant 0$$

$$(3x^2-x-2)(6x^2-7x+2) > 0$$

$$\frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x} \geqslant 0$$

$$\frac{x^2-(2+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}}{x^2+3x} \leqslant 0$$

الجواب :

نعتبر : $(I) : \frac{x+2}{x^2+3x-4} \leqslant 0$

$x \in D_{(I)}$ تكافئ: $x \in \mathbb{R}$ و $x^2+3x-4 \neq 0$

$\Delta = 9+16 = 25 > 0$

$x = \frac{-3+5}{2}$ أو $x = \frac{-3-5}{2}$

أي أن $x = -4$ أو $x = 1$

$D_I = \mathbb{R} \setminus \{-4 \ , 1\}$

لدينا :

x	$-\infty$		-4		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+3x-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x^2+4}{x^2+3x-4}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

إذن $S =]-\infty \, , -4[\cup [-2 \, , 1[$

* لدينا $(3x^2-x-2)(6x^2-7x+2) > 0$

نعتبر: $3x^2-x-2=0 \ ; \ 6x^2-7x+2=0$

إذن

x	$-\infty$		$\frac{-2}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2-x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن $S =]-\infty \, , -\frac{2}{3}] \cup [1 \, , +\infty[$

* لدينا $x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 12 \leqslant 0$

$\Delta' = (-2\sqrt{3})^2 - 12$

$= 0$

إذن : $x = 2\sqrt{3}$

إذن :

x	$-\infty$		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
$x^2-4\sqrt{3}x+12$		$+$	0	$+$	

إذن : $S = \{2\sqrt{3}\}$

* لدينا $-5x^2 + 2\sqrt{5}\,x + 4 \geqslant 0$

$\Delta' = (\sqrt{5})^2 - (-8) \, . \, 4$

$= 25$

$\sqrt{\Delta'} = 5$

$x = \frac{-\sqrt{5}+5}{-5}$ أو $x = \frac{-\sqrt{5}-5}{-5}$

$x = \frac{-\sqrt{5}+5}{5}$ أو $x = \frac{\sqrt{5}+5}{5}$

إذن :

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{5}+5}{5}$		$\frac{\sqrt{5}+5}{5}$		$+\infty$
$-5x^2+2\sqrt{5}x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن $S = \left]\frac{-\sqrt{5}+5}{5} \, , \frac{\sqrt{5}+5}{5}\right[$

$\Delta = 1 + 24$; $\Delta = 49 - 24$

$= 25$; $= 1$

$x = \frac{1+5}{6}$ أو $x = \frac{1-5}{6}$; $x = \frac{7+1}{12}$ أو $x = \frac{7-1}{12}$

$x = 1$ أو $x = -\frac{2}{3}$; $x = \frac{2}{3}$ أو $x = \frac{1}{2}$

إذن :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2 - x - 2$		+	0	-	|	-	|	-	0	+	
$6x^2 - 7x + 2$		+	|	+	0	-	0	+	|	+	
		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

$S = \left]-\infty , -\frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{2} , \frac{2}{3}\right[\cup \left]1 , +\infty\right[$

* لدينا $(I') : \frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x} \geqslant 0$

$x \in D_{(I')}$ تكافئ: $x \in \mathbb{R}$ و $x \neq 0$ و $x + 1 \neq 0$

أي أن $x \in \mathbb{R}$ و $x \neq 0$ و $x \neq -1$

$D_{(I')} = \mathbb{R} \setminus \{-1 , 0\}$

(I') تكافئ : $\frac{2x^2 - (x+1)}{x(x+1)} \geqslant 0$

أي أن $\frac{2x^2 - x - 1}{x(x+1)} \geqslant 0$

نعتبر: $2x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$x = \frac{1-3}{4}$ أو $x = \frac{1+3}{4}$

$x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ أو $x = 1$

إذن :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$2x^2 - x - 1$		+	|	+	0	-	|	-	0	+	
$x(x+1)$		+	0	-	|	-	0	+	|	+	
$\frac{2x^2 - x - 1}{x(x+1)}$		+	||	-	0	+	||	-	0	+	

$S = \left]-\infty , -1\right] \cup \left[\frac{-1}{2} , 0\right] \cup \left[1 , +\infty\right[$

* لدينا $(I'') : \frac{x^2 - (2+\sqrt{3})x + 2\sqrt{3}}{x^2 + 3x} \leqslant 0$

$x \in D_{(I'')}$ تكافئ: $x \in \mathbb{R}$ و $x^2 + 3x \neq 0$

أي أن $x \in \mathbb{R}$ و $x(x+3) \neq 0$

يعني أن : $x \in \mathbb{R}$ و $x \neq 0$ و $x \neq -3$

$D_{(I'')} = \mathbb{R} \setminus \{-3 , 0\}$

نعتبر : $x^2 - (2+\sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$

$\Delta = (2+\sqrt{3})^2 - 8\sqrt{3}$

$= 2^2 + 4\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 - 8\sqrt{3}$

$= (2-\sqrt{3})^2$

إذن : $\sqrt{\Delta} = 2 - \sqrt{3}$

إذن : $x = \frac{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{2}$

أو $x = \frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{2}$

أي ان $x = \sqrt{3}$ أو $x = 2$

x	$-\infty$		-3		0		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$x^2-(2+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}$		+	|	+	|	+	0	-	0	+	
$x^2 + 3x$		+	0	-	0	+	|	+	|	+	
$\frac{x^2-(2+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}}{x^2+3x}$		+	||	-	||	+	0	-	0	+	

إذن : $S = \left]-3 , 0\right[\cup \left[\sqrt{3} , 2\right]$

تمرين 14 :

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$$\frac{1}{x+2} \geqslant x$$

$$\frac{x+4}{(x-2)^2} \leqslant \frac{1}{x-2}$$

$$\frac{x+2}{x} - \frac{2x}{x+1} < 2$$

الجواب :

* نعتبر : $(I) : \frac{1}{x+2} \geqslant x$

$x \in D_{(I)}$ تكافئ: $x \in \mathbb{R}$ و $x+2 \neq 0$

أي أن $x \in \mathbb{R}$ و $x \neq 2$

$D_{(I)} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

(I) تكافئ : $\frac{1}{x+2} - x \geqslant 0$

تكافئ : $\frac{1 - x(x+2)}{(x+2)} \geqslant 0$

أي ان $\frac{-x^2 - 2x + 1}{x+2} \geqslant 0$

نعتبر : $-x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta' = 1 + 1 = 2$

$x = \frac{1+\sqrt{2}}{-1}$ أو $x = \frac{1-\sqrt{2}}{-1}$

$x = -1-\sqrt{2}$ أو $x = -1+\sqrt{2}$

x	$-\infty$; $-1-\sqrt{2}$	$-1-\sqrt{2}$; -2	-2 ; $-1+\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{2}$; $+\infty$
$-x^2-2x+1$	-	+	+	-
$x+2$	-	-	+	+
$\frac{-x^2-2x+1}{x+2}$	+	-	+	-

إذن : $S = \left]-\infty , -1-\sqrt{2}\right] \cup \left]-2 , -1+\sqrt{2}\right]$

* نعتبر : $(I') : \frac{x+4}{(x-2)^2} \leqslant \frac{1}{x-2}$

$x \in D_{(I')}$ تكافئ: $x \in \mathbb{R}$ و $x - 2 \neq 0$

أي أن $x \in \mathbb{R}$ و $x \neq 2$

$D_{(I')} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

(I') تكافئ : $\frac{x+4}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} \leqslant 0$

تكافئ : $\frac{x+4-(x-2)x}{(x+2)^2} \leqslant 0$

أي ان $\frac{x+4 - x^2+2x}{(x-2)^2} \leqslant 0$

إذن : $\frac{-x^2+3+2x}{(x-2)^2} \leqslant 0$

نعتبر : $-x^2+3x+4=0$

$\Delta = 25 > 0$

$x = \frac{-3+5}{-2}$ أو $x = \frac{-3-5}{-2}$

$x = -1$ أو $x = 4$

إذن :

x	$-\infty$; -1	-1 ; 2	2 ; 4	4 ; $+\infty$
$-x^2+3x+4$	-	+	+	-
$(x-2)^2$	+	+	+	+
$\frac{-x^2+3x+4}{(x-2)^2}$	-	+	+	-

إذن $S = \left]-\infty , -1\right] \cup \left[4 , +\infty\right[$

* نعتبر : $(I'') : \frac{x+2}{x} - \frac{2x}{x+1} < 2$

$x \in D_{(I'')}$ تكافئ: $x \in \mathbb{R}$ و $x+2 \neq 0$ و $x \neq 0$

أي أن $x \in \mathbb{R}$ و $x \neq -1$ و $x \neq 0$

$D_{(I'')} = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 0\}$

(I'') تكافئ : $\frac{(x+2)}{x} - \frac{2x}{x+1} - 2 \leqslant 0$

تكافئ :

$$\frac{(x+1)(x+2)}{x(x+1)} - \frac{2x.x}{x(x+1)} - \frac{2x.x}{x(x+1)} \leqslant 0$$

أي أن $\frac{x^2+3x+2-2x^2-2x^2+3x}{x(x+1)} \leqslant 0$

إذن : $\frac{-3x^2+x+2}{x(x+1)} \leqslant 0$

نعتبر : $-3x^2+x+2=0$

$$\Delta = 25 > 0$$

$x = \frac{-1-5}{-6}$ أو $x = \frac{-1+5}{-6}$

$x = 1$ أو $x = \frac{-2}{3}$

إذن :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{3}$		0		1		$+\infty$
$-3x^2+x+2$		-		-	0	+		+	0	-	
$x(x+1)$		+	0	-		-	0	+		+	
$\frac{-3x^2+x+2}{x(x+1)}$		-	‖	+	0	-	‖	+	0	-	

إذن :

$$S =]-\infty, -1[\cup [\frac{-2}{3}, 0[\cup [1, +\infty[$$

تمرين 15 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$\sqrt{x^2+1} = 2x-1$$

$$\sqrt{x+2} = x$$

$$x + \sqrt{x^2-4x} = 3$$

الجواب :

لدينا : $(E) : \sqrt{x^2+1} = 2x-1$

لدينا $D_E = \mathbb{R}$

إذا كان : $2x-1<0$ أي أن $x < \frac{1}{2}$

فإن : $S_1 = \phi$

إذا كان : $2x-1 \geqslant 0$ أي أن $x \geqslant \frac{1}{2}$

فإن (E) تكافئ : $x^2+1 = (2x-1)^2$

أي أن : $x^2+1 = 4x^2-4x+1$

يعني أن : $3x^2-4x=0$

$$x(3x-4)=0$$

إذن : $x = \frac{4}{3}$ أو $x=0$

وبما أن : $\frac{4}{3} \geqslant \frac{1}{2}$ فإن :

$$S_2 = \left\{\frac{4}{3}\right\}$$

لدينا : $S = S_1 \cup S_2$

إذن $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

* نعتبر : $(E') : \sqrt{x+2} = x$

لدينا $D_{E'} = [-2, +\infty[$

إذا كان : $x<0$ فإن (E') مستحيلة وبالتالي:

$$S_1 = \phi$$

إذا كان : $x \geqslant 0$ فإن (E') تكافئ :

$$x+2 = x^2$$

أي أن : $x^2-x-2=0$

$$\Delta = 8+1 = 9$$



$x = \frac{1+3}{2}$ أو $x = \frac{1-3}{2}$

$x = 2$ أو $x = -1$

إذن : $S_2 = \{2\}$

لدينا : $S = S_1 \cup S_2$

إذن $S = \{2\}$

* نعتبر : $(E'') : x + \sqrt{x^2 - 4x} = 3$

$x \in D_{(E'')}$ تكافئ: $x^2 - 4x \geqslant 0$

أي أن : $x(x-4) \geqslant 0$

إذن

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$x^2 + 4x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن $D_{(E'')} =]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$

(E'') تكافئ : $\sqrt{x^2 - 4x} = 3 - x$

إذا كان : $3 - x < 0$ أي أن : $x > 3$

فإن (E'') مستحيلة وبالتالي:

$S_1 = \phi$

إذا كان : $3 - x \geqslant 0$ أي أن : $x \leqslant 3$

فإن (E'') تكافئ :

$x^2 - 4x = (3 - x)^2$

أي أن : $x^2 - 4x = 9 - 6x + x^2$

يعني أن : $-4x + 6x = 9$

$2x = 9$

$x = \frac{9}{2}$

إذن $S_2 = \phi$

ومنه : $S = S_1 \cup S_2$

إذن $= \phi$

إذن $S = \phi$

تمرين 16:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$\sqrt{x - 3} > x$

$x + 1 < \sqrt{x + 2}$

$x - 1 > \sqrt{x^2 + 2x}$

$3x - \sqrt{x - 1} \leqslant 0$

الجواب:

* نعتبر : $(I) : \sqrt{x - 3} > x$

$D_I = [3, +\infty[$

إذا كان $x \in D_I$ فإن (I) تكافئ:

$(\sqrt{x - 3})^2 > x^2$

$x - 3 > x^2$

أي أن : $x^2 - x + 3 < 0$

$\Delta = 1 - 12 = -11$

إذن $x^2 - x + 3$ لها إشارة $a = 1$ إذن لكل x من $[3, +\infty[$

$x^2 - x + 3 > 0$

ومنه $S = \phi$

* نعتبر : $(I') : x + 1 < \sqrt{x + 2}$

$D_{I'} = [-2, +\infty[$

إذا كان : $x + 1 \leqslant 0$ أي أن : $x \leqslant -1$

فإن (I') محققة وبالتالي :

$$S_2 = [-2 , +\infty[\cap]-\infty , -1]$$

$$= [-2 , -1]$$

إذا كان : $x + 1 > 0$ أي أن : $x > -1$

فإن (I') تكافئ :

$$(x+1)^2 < x + 2$$

أي أن : $x^2 + 2x + 1 < x + 2$

تكافئ : $x^2 + x - 1 < 0$

$$\Delta = 5$$

أي ان: $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ أو $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

أي أن : $x \in \left]\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} , \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right[$

إذن :

$$S_2 =]-1 , +\infty[\cap \left]\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} , \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right[$$

$$= \left]-1 , \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right[$$

وبالتالي : $S = S_1 \cup S_2$

$$= [-2 , -1] \cup \left]-1 , \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right[$$

$$= \left[-2 , \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right[$$

* نعتبر : $(I'') : x - 1 > \sqrt{x^2 + 2x}$

$x \in D_{(I'')}$ تكافئ: $x \in \mathbb{R}$ و $x^2 + 2x \geqslant 0$

أي أن : $x(x+2) \geqslant 0$ و $x \in \mathbb{R}$

$$D_{(I'')} =]-\infty , -2] \cup [0 , +\infty[$$

إذا كان : $x - 1 \leqslant 0$ أي أن : $x \leqslant 1$

فإن (I'') مستحيلة ومنه :

$$S_1 = \phi$$

إذا كان : $x - 1 > 0$ أي أن : $x > 1$

فإن (I'') تكافئ :

$$(x-1)^2 > x^2 + 2x$$

أي أن : $x^2 - 2x + 1 > x^2 + 2x$

$$-4x > -1$$

إذن : $x < \frac{1}{4}$

إذن : $x \in \left]-\infty , \frac{1}{4}\right[$

وبما أن : $x > 1$ فإن $S_2 = \phi$

إذن : $S = S_1 \cup S_2$

$$S = \phi$$

* نعتبر $(I''') : 3x - \sqrt{x - 1} \leqslant 0$

لدينا : $D_{(I''')} = [1 , +\infty[$

(I''') تكافئ : $3x \leqslant \sqrt{x - 1}$

إذا كان $x \in D_{(I''')}$ فإن (I''') تكافئ:

$$(3x)^2 \leqslant (x - 1)$$

أي أن : $9x^2 - x + 1 \leqslant 0$

$$\Delta = 1 - 36 = -37 < 0$$

إذن : $9x^2 - x + 1$ لها إشارة العدد : $a = 9$

ومنه $S = \phi$

تمرين 17 :

نعتبر الحدودية

$P(x) = x^2 - (3\sqrt{3} - \sqrt{2})x + 2$

1 - بين أن المعادلة : $P(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين في $\mathbb{R}$ دون حسابهما

2 - احسب مجموع وجداء حلي المعادلة $P(x) = 0$

3 - احسب $P(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ ثم استنتج حلول المعادلة $P(x) = 0$

الجواب :

1) - لدينا $P(x) = 0$

تكافئ : $x^2 - (3\sqrt{3} - \sqrt{2})x + 2 = 0$

$\Delta = (3\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$

$= 27 - 6\sqrt{6} + 2 - 8$

$= 21 - 6\sqrt{6}$

$= 21 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

$= (3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2(3\sqrt{2}).(\sqrt{3})$

$= (3\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 > 0$

إذن المعادلة $P(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين α و β

2) - نعلم أن :

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

$\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$

إذن :

$\alpha + \beta = 3\sqrt{3} - \sqrt{2}$

$\alpha \times \beta = 2$

3) -

$P(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + 2$

$= 3 + 2\sqrt{6} + 2 - 9 - 3\sqrt{6} + \sqrt{6} + 2 + 2$

$= 9 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 9$

$= 0$

إذن : $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ حل للمعادلة $P(x) = 0$

لنضع : $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

نعلم أن : $\alpha + \beta = 3\sqrt{3} - \sqrt{2}$

إذن : $\sqrt{3} + \sqrt{2} + \beta = 3\sqrt{3} - \sqrt{2}$

ومنه : $\beta = 3\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$\beta = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

$\beta = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

ومنه : $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

$\beta = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

تمرين 18 :

حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمات التالية :

① $\begin{cases} x + y = 1 \\ x \times y = 1 \end{cases}$

② $\begin{cases} x + y = 9 \\ x \cdot y = 14 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 3(x + y) = \frac{-7}{2} \\ 2x \cdot y = \frac{1}{3} \end{cases}$

الجواب :

* لدينا ① $\begin{cases} x + y = 1 \\ x \times y = 1 \end{cases}$

x و y حلا المعادلة :

$t^2 - t + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4$

$= -3 < 0$

إذن النظمة ① ليس لها حلول :

إذن : $S = \phi$

* لدينا ② $\begin{cases} x + y = 9 \\ x . y = 14 \end{cases}$

x و y حلا المعادلة :

$t^2 - 9t + 14 = 0$

$\Delta = 81 - 56$

$= 25$

$\sqrt{\Delta} = 5$

إذن : $t = \frac{9 - 5}{2}$ أو $t = \frac{9 + 5}{2}$

$t = 2$ أو $t = 7$

ومنه :

إذا كان $x = 2$ فإن $y = 7$

إذا كان $x = 7$ فإن $y = 2$

$S = \{(2 , 7) , (7 , 2)\}$

* لدينا ③ $\begin{cases} 3 (x + y) = \frac{-7}{2} \\ 2x . y = \frac{1}{3} \end{cases}$

تكافئ : $\begin{cases} x + y = \frac{-7}{6} \\ x . y = \frac{1}{6} \end{cases}$

x و y حلا المعادلة :

$t^2 + \frac{7}{6} t + \frac{1}{6} = 0$

أي أن : $6t^2 + 7t + 1 = 0$

$\Delta = 49 - 24 = 25$

$\sqrt{\Delta} = 5$

إذن : $t = \frac{-7 - 5}{12}$ أو $t = \frac{-7 + 5}{12}$

$t = -1$ أو $t = \frac{1}{6}$

إذا كان $x = -1$ فإن $y = \frac{1}{6}$

إذا كان $x = \frac{1}{6}$ فإن $y = -1$

$S = \left\{\left(-1 , \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6} , -1\right)\right\}$

تمرين 19 :

(E) : $4x^2 - 9x + 4 = 0$

1 - بين أن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2

2 - أ - أحسب مجموع وجداء الحلين x_1 و x_2

- ب - استنتج الاعداد التالية :

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ و $x_1^2 + x_2^2$ و $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$

الجواب :

1 - لدينا : (E) : $4x^2 - 9x + 4 = 0$

$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 4 \times 4$

$= 81 - 64$

$= 17 > 0$



إذن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2

2 - نعلم أن :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 \times x_2 = 1 \end{cases}$$

إذن :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{9}{4} \\ x_1 \times x_2 = 1 \end{cases}$$

ب - لدينا :
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 . x_2}$$
$$= \frac{\frac{9}{4}}{1} = \frac{9}{4}$$

إذن :
$$\boxed{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{9}{4}}$$

* لدينا : $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1.x_2$

أي ان : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2$
$$= \left(\frac{9}{4}\right)^2 - 2 \times 1$$
$$= \frac{81}{16} - 2$$
$$= \frac{81 - 32}{16}$$
$$\boxed{x_1^2 + x_2^2 = \frac{49}{16}}$$

* لدينا :
$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$$
$$= \frac{x_2^3 + x_1^3}{x_2^3 \times x_1^3}$$
$$= \frac{(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2)}{(x_1 \times x_2)^3}$$
$$= \frac{(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 . x_2)}{(x_1 \times x_2)^3}$$
$$= \frac{\frac{9}{4} \times \left(\frac{49}{16} - 1\right)}{1^3}$$
$$= \frac{9}{4} \times \left(\frac{49-16}{16}\right)$$
$$= \frac{9 \times 33}{4 \times 16}$$

إذن :
$$\boxed{\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{297}{64}}$$

تمرين 20 :

نعتبر المعادلة : $(E) : -x^2 + mx + 6 = 0$

1 - أ - حدد العدد الحقيقي m بحيث يكون العدد 2 حل للمعادلة (E) .

ب - حدد في هذه الحالة الحل الثاني .

2 - حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية :
$$\frac{x + 3}{x - 1} \leqslant x + 3$$

الجواب :

1 - أ) 2 حل للمعادلة (E) تعني أن :
$$-2^2 + m . 2 + 6 = 0$$

أي أن : $-4 + 2m + 6 = 0$

أي أن : $2m = -2$

إذن : $\boxed{m = -1}$

ب - ومنه $(E):\ -x^2 - x + 6 = 0$

$$\Delta = 1 + 24$$
$$= 25$$
$$\sqrt{\Delta} = 5$$

إذن : $x = \frac{1-5}{-2}$ أو $x = \frac{1+5}{-2}$

$x = 2$ أو $x = -3$

إذن الحل الاخر هو (-3)

2) نعتبر : $(I):\ \frac{x+3}{x-1} \leqslant x+3$

لدينا $D_I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(I) تكافئ : $\frac{x+3}{x-1} - (x+3) \leqslant 0$

تكافئ : $(x+3)\left(\frac{1}{x-1} - 1\right) \leqslant 0$

إذن : $(x+3)\left(\frac{1-x+1}{x-1}\right) \leqslant 0$

إذن : $\frac{(x+3)(-x+2)}{x-1} \leqslant 0$

وبالتالي :

x	$-\infty$ -3	1	2	$+\infty$
$x+3$	-	+	+	+
$-x+2$	+	+	+	-
$x-1$	-	-	+	+
$\frac{(x+3)(-x+2)}{x-1}$	+	-	+	-

إذن : $S = [-3, 0[\cup [2, +\infty[$

تمرين 21 :

1) - أ - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

ب - حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية :

$$\frac{x+7}{x^2-4} > -2$$

2) نعتبر الحدودية :

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4$$

أ - حدد حدودية $Q(x)$ حيث

$P(x) = (x^2-4).Q(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب - حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P(x) \geqslant 0$

الجواب :

1) أ- $2x^2 + x - 1 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-1)$$
$$= 9$$
$$\sqrt{\Delta} = 3$$

إذن : $x = \frac{-1-3}{4}$ أو $x = \frac{-1+3}{4}$

$x = -1$ أو $x = \frac{1}{2}$

$$S = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$$

ب - لدينا $\frac{x+7}{x^2-4} > -2$

تكافئ : $\frac{x+7}{x^2-4} + 2 > 0$

أي أن : $\frac{x+7+2x^2-8}{x^2-4} > 0$

يعني أن : $\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-4} > 0$

نعتبر الجدول التالي :

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2+x-1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-4}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

إذن :

$$S =]-\infty, -2[\cup]-1, \tfrac{1}{2}[\cup]2, +\infty[$$

(2 $P(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4$

نعتبر الموضعة التالية :

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4 & x^2 - 4 \\ \cline{2-2} -2x^4 + 8x^2 \qquad\qquad & 2x^2 + x - 1 \\ \hline 0 \quad x^3 - x^2 - 4x + 4 & \\ -x^3 \qquad + 4x \qquad & \\ \hline 0 \quad -x^2 \quad + 4 & \\ +x^2 \quad - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

إذن : $P(x) = (x^2-4)(2x^2+x-1)$

ومنه $Q(x) = 2x^2 + x - 1$

ب - لدينا $P(x) \geqslant 0$

يعني أن $(x^2-4)(2x^2+x-1) \geqslant 0$

وحسب الجدول السابق : جواب سؤال 1)-ب

فإن :

$$S =]-\infty, -2[\cup [-1, \tfrac{1}{2}] \cup [2, +\infty[$$

تمرين 22 :

1- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$6x^2 - 7x - 5 = 0$$

2 - استنتج إشارة :

$$6x^2 - 7x - 5$$

3 - استنتج حلول المتراجحة :

$$6(1-2x)^2 - 7(1-2x) - 5 \leqslant 0$$

الجواب :

1) لدينا : $6x^2 - 7x - 5 = 0$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 6 \times (-5)$$
$$= 49 + 120$$
$$= 169$$
$$\sqrt{\Delta} = 13$$

إذن : $x = \dfrac{7-13}{12}$ أو $x = \dfrac{7+13}{12}$

$x = \dfrac{-1}{2}$ أو $x = \dfrac{5}{3}$

$$S = \left\{ \frac{-1}{2}, \frac{5}{3} \right\}$$

2) إشارة : $6x^2 - 7x - 5$

نعتبر الجدول التالي :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$6x^2-7x-5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

لدينا : $6x^2 - 7x - 5 > 0$ لكل x من المجالين

$]-\infty , \frac{-1}{2}[$ و $]\frac{5}{3}, +\infty[$

لدينا $6x^2 - 7x - 5 < 0$ لكل x من

$]\frac{-1}{2} , \frac{5}{3}[$

3) لدينا

$(I) : 6(1-2x)^2 - 7(1-2x) - 5 \leqslant 0$

لنضع : $X = 1 - 2x$

إذن (I) تكافئ : $6X^2 - 7X - 5 \leqslant 0$

حسب السؤال ② لدينا :

$X \in \left[\frac{-1}{2} , \frac{5}{3}\right]$

أي أن : $1 - 2x \in \left[\frac{-1}{2} , \frac{5}{3}\right]$

يعني أن : $\frac{-1}{2} \leqslant 1 - 2x \leqslant \frac{5}{3}$

أي أن : $\frac{-3}{2} \leqslant -2x \leqslant \frac{2}{3}$

أي أن : $\frac{-1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$

إذن : $S = \left[\frac{-1}{3} , \frac{3}{4}\right]$

تمرين 23 :

ليكن : $P(x) = 2x^2 - 4x + 1$

1 - بين أن المعادلة $P(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2

2 - احسب $P\left(\frac{1}{4}\right)$ و $P\left(\frac{3}{4}\right)$

3 - قارن $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{4}$ مع الجدرين x_1 و x_2

الجواب :

1 - لدينا مميز الحدودية :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 16 - 4 \times 2 \times 1$

$= 8 > 0$

إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2

بحيث $x_1 < x_2$

2 - $P\left(\frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{4} + 1$

إذن : $P\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$

$P\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 4 \times \frac{3}{4} + 1$

$= \frac{9}{8} - 3 + 1$

$= \frac{9}{8} - 2 = \frac{-7}{8}$

3 - لدينا إشارة $P(x)$

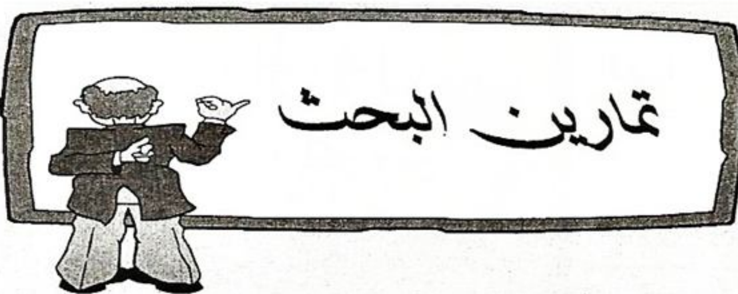
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
P(x)		+	0	-	0	+	

لدينا : $P\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-7}{8} < 0$

إذن $x_1 \leqslant \frac{3}{4} \leqslant x_2$

وبما أن : $P\left(\frac{1}{4}\right) > 0$

فإن : $\frac{1}{4} < x_1 < \frac{3}{4} < x_2$



تمرين 1 :

حل في $\mathbb{R}$ ما يلي :

$2x^2+1>0 \quad ; \quad x^2+17x+66<0$

$\frac{1}{x+2} \geqslant \frac{1}{x-3} \quad ; \quad x^2+1-|2x| \geqslant 0$

$\frac{|x|-2}{|x|+2}<1 \quad ; \quad |3x^2-1|+\sqrt{2} \leqslant 0$

تمرين 2 :

لتكن الحدودية : $P(x)=(x^2-2x)^2+x^2-2x+42$

1 - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $t^2+t-42=0$

عمل : $Q(t)=t^2+t-42$

2 - عمل الحدودية $P(x)$ ثم حل المعادلة : $P(x)=0$

تمرين 3 :

نعتبر المعادلة : $(E): \ 7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$

1 - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2X^2-7X+5=0$

2 - استنتج حلول المعادلة (E)

تمرين 4 :

1 - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^4-2x^2+1=0$

2 - استنتج حلول المعادلة $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2+\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2-2=0$



تمرين 5 :

1 - أ - حل المعادلة : $2x^2 + 3x - 2 = 0$

ب - حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $\frac{2x^2 + 1}{1 - x} \geqslant 3$

2 - نعتبر الحدودية : $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

أ - بين ان $P(x)$ تقبل القسمة على $(x - 1)$

ب - حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $P(x) < 0$

تمرين 6 :

نعتبر الحدودية : $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 6$

1 - تحقق من أن 2 جذر لـــ $P(x)$ ثم حدد حدودية $Q(x)$ حيث $P(x) = (x - 2).Q(x)$

2 - ادرس إشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$

3 - أ) - حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P(x) \leqslant 0$

ب - حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x(2\sqrt{x} - 5) - \sqrt{x} + 6 \leqslant 0$

تمرين 7 :

حل في $\mathbb{R}$ مايلي :

$\sqrt{x + 1} = x$

$\sqrt{x^2 + 1} = x - 4$

$\sqrt{2x - 1} < x - 1$

تمرين 8 :

1 - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2 - x + 20 = 0$

2 - نعتبر ABCD شبه منحرف طولا قاعدتاه هما : $2x + 1$ و x وارتفاعه : $(x - 2)$

حدد العدد الحقيقي x حيث مساحة شبه المنحرف ABCD تساوي $27cm^2$.



تمرين 9 :

1 - حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $x^2 - 8x - 240 > 0$

2 - ليكن x طول مستطيل ABCD وعرضه هو $x - 8$

حدد المجال الذي ينتمي إليه x لكي تكون مساحة المستطيل ABCD أكبر قطعا من 240 ونصف محيطه أصغر قطعا من 42.

تمرين 10 :

1 - حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ مايلي :

① $\begin{cases} x - y = 16 \\ x \times y = 1024 \end{cases}$

② $\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{-1}{12} \end{cases}$

③ $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 0 \\ x + y = -2 \end{cases}$

تمرين 11 :

1 - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $-2x^2 + x + 3 = 0$

2 - حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $-2x^2 + x + 3 \geqslant 0$

3 - أ - استنتج حل المعادلة : $-2x + \sqrt{x} + 3 = 0$

ب - استنتج حل المعادلة : $-2x^2 + |x| + 3 = 0$

4 - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x + |2x^2 - x - 3| = 1$

تمرين 12 :

1 - حدد عددين صحيحين طبيعين علما أن فرقهما هو 4 وفرق مكعبيهما هو 316

2 - نريد أن نوزع 12000 درهم بين n شخص لو نقصي أربعة أشخاص لأخذ كل واحد من الباقين القدر 1500درهم .

حدد العدد n.



الحساب المتجهي

- عدد الصفحات : [16]
- عدد التمارين : [18]
- عدد تمارين البحث : [10]



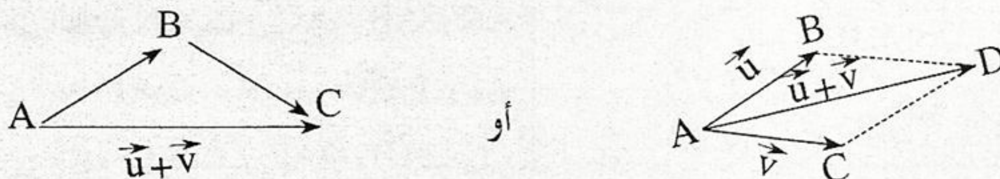


5 الهندسة المستوية : الحساب المتجهي

1 ـ تساوي متجهتين :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ يعني ABDC متوازي الأضلاع.

2 ـ مجموع متجهتين :



* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ تعني أن الرباعي ABDC متوازي الأضلاع.

* لكل A و B و C من (P) : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (علاقة شال).

* لكل A و B من (P) : $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

3 ـ ضرب متجهة في عدد حقيقي :

* لتكن A و B من (P) و $\alpha\in\mathbb{R}$ توجد نقطة وحيدة C بحيث $\overrightarrow{AC}=\alpha\,\overrightarrow{AB}$.

4 ـ الاستقامية :

a - $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين يعني $\vec{v}=\alpha\,\vec{u}$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.

b - A ، B ، C ثلاث نقط مستقيمية يعني أنه يوجد $\alpha\in\mathbb{R}$ بحيث $\overrightarrow{AC}=\alpha\,\overrightarrow{AB}$.

c - (AB) // (CD) يعني $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتان.

5 ـ المنتصف :

* I منتصف [AB] يعني : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

يعني : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

يعني : $\overrightarrow{BI}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$



تمارين وحلولها

تمرين 1 :

لتكن A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمية من المستوى (P).

1 – أنشئ النقطة M بحيث : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

2 – أنشئ النقطة N بحيث : $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

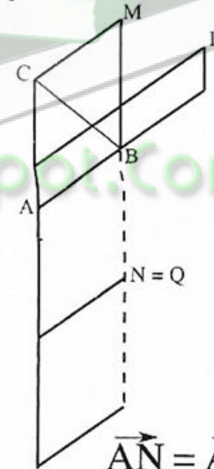
3 – أنشئ النقطة P بحيث : $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

4 – أنشئ النقطة Q بحيث : $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

الجواب :

1 – لدينا : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

يعني ABMC متوازي الأضلاع .



2 - $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

يعني $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$

يعني $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{CB}$

يعني ANBC متوازي الأضلاع .

3 - لإنشاء النقطة P ننشئ المتجهة $2\overrightarrow{AB}$ والمتجهة $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ إنطلاقا من A ثم نتمم متوازي الأضلاع .

4 - $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

يعني $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}$

يعني $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$

يعني $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{CB}$

يعني CBQA متوازي الأضلاع

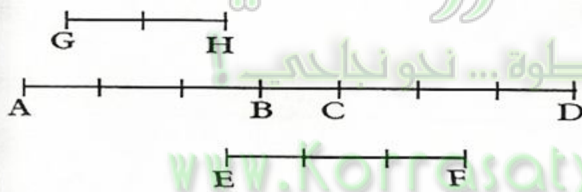
وحسب 2) لدينا $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AN}$

إذن $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AQ}$

إذن $Q=N$

تمرين 2 :

نعتبر النقط A و B و C و D و E و F و G و H من المستوى (P) (انظر الشكل)



– حدد المتجهات $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{HG}$ بدلالة المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

الجواب :

* لدينا :

$\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AD}=\frac{7}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{DA}=-\frac{7}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{HG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

تمرين 3:

ABC مثلث في المستوى (P).

1 - أنشئ النقطة M بحيث : $\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{AC}$

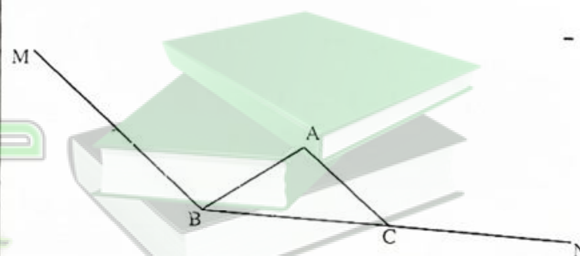
2 - أنشئ النقطة N بحيث :

$\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

3 - بين أن A منتصف القطعة [MN].

الجواب :

1 -



2 - لدينا $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

يعني $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

يعني $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BC}$

يعني C منتصف [BN].

3 - لدينا

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

$= -2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC}$

إذن : $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AN} = \vec{0}$

وبالتالي A منتصف [MN].

تمرين 4:

ABC مثلث في المستوى (P).

نعتبر النقطتين D و E حيث :

$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$

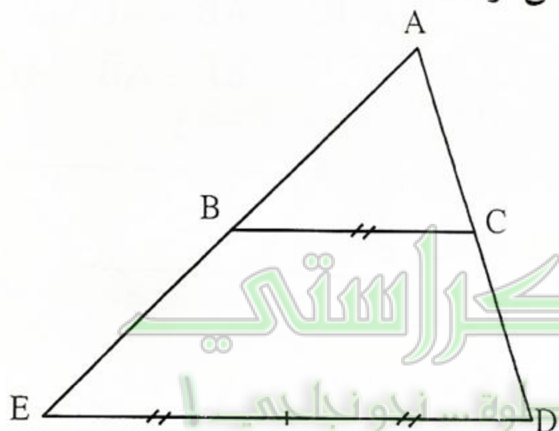
1 - أنشئ النقطتين D وE.

2 - بين أن النقطة C منتصف القطعة [AD].

الجواب :

1 - لدينا : $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BA}$ يعني أن B منتصف [EA].

ننشئ أولا E.



2 - لدينا :

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED}$

$= 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$

إذن : $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

وهذا يعني أن C منتصف [AD].

تمرين 5:

A، B و C ثلاث نقط غير مستقيمية في المستوى (P) أنشئ النقطتين I و J بحيث :

$3\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BJ} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

الجواب :

- لدينا $3\vec{IA} - \vec{AB} = \vec{IB} + 2\vec{AB}$

يعني $3\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{AB} + 2\vec{AB}$

يعني $2\vec{IA} + \vec{IA} + \vec{BI} = 3\vec{AB}$

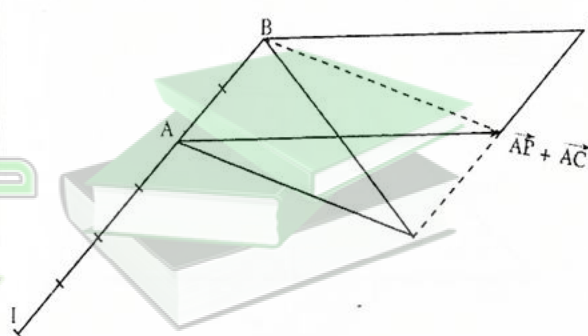
يعني $2\vec{IA} + \vec{BA} = 3\vec{AB}$

يعني $2\vec{IA} = 4\vec{AB}$

يعني $\vec{AI} - 2\vec{AB}$

- لدينا $\vec{BJ} \quad \vec{AB} = \vec{AC}$ يعني

$\vec{BJ} = \vec{AB} \quad \vec{AC}$



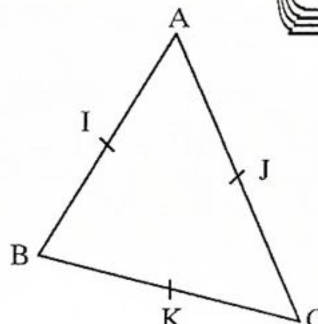
تمرين 6:

ليكن ABC مثلثا و I منتصف [AB] و J منتصف [AC] و K منتصف [BC].

1 - أثبت أن : $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$

2 - استنتج أن IJKB متوازي الأضلاع.

الجواب :



1 – لدينا $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ}$

$- \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

إذن $\vec{IJ} - \frac{1}{2}\vec{BC}$

2 - لدينا $\vec{IJ} - \frac{1}{2}\vec{BC}$

و K منتصف [BC] إذن $\vec{BK} \quad \frac{1}{2}\vec{BC}$

إذن $\vec{IJ} = \vec{BK}$

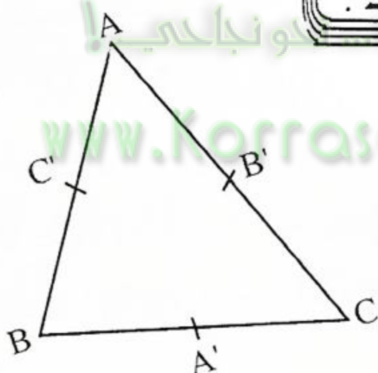
ومنه IJKB متوازي الأضلاع.

تمرين 7:

ABC مثلث و A' و B' و C' منتصفات [BC] و [AC] و [BC] على التوالي :

أثبت أن : $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{0}$

الجواب :



لدينا A' منتصف [BC] إذن :

$\vec{AA'} \quad \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$

بنفس الطريقة لدينا $\vec{BB'} - \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{BA})$

كذلك : $\vec{CC'} \quad \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$

ومنه

$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} - \frac{1}{2}(\vec{AB} \quad \vec{AC})$

$, \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{BA}) + \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

$= \frac{1}{2}(\vec{0})$

إذن : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

تمرين 8:

ليكن ABC مثلثا و M و N نقطتان من المستوى (P) حيث : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
و $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}$.

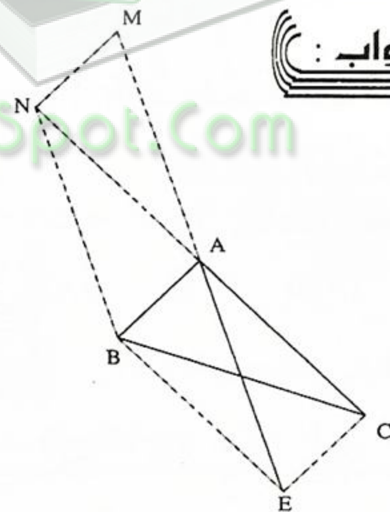
1 - أنشئ الشكل.

2 - بين أن A منتصف [CN].

3 - نعتبر النقطة E حيث $\overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{MA}$.

ماهي طبيعة الرباعي MNEC ؟

الجواب :



لدينا $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

أي $\overrightarrow{AM} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

2 – لدينا $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}$

$= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

$= -\overrightarrow{AC}$

ومنه $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

وهذا يعني أن : A منتصف [CN].

3 – لدينا $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}$

يعني أن AMNB متوازي أضلاع.

إذن $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$

لدينا $\overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{AM}$ أي A منتصف [ME]

وبالتالي : $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AM}$

$= \overrightarrow{AM}$

إذن $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

وبالتالي ABEC متوازي الأضلاع

ومنه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$

وحيث أن $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$

فإن $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CE}$

وهذا يعني أن MNEC متوازي الأضلاع.

تمرين 9:

ليكن ABCD متوازي الأضلاع.

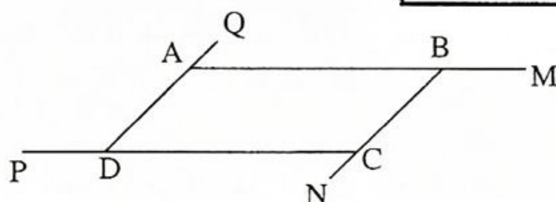
1 – أنشئ النقط M ، N و P و Q بحيث :

$\overrightarrow{AM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ ، و $\overrightarrow{CP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CD}$

و $\overrightarrow{DQ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DA}$

2 – أثبت أن الرباعي MNPQ متوازي الأضلاع.

الجواب :



2 – لدينا $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DQ}$

$= \frac{4}{3}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} + \frac{4}{3}\overrightarrow{DA}$

$= \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$

$= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{NB}$

ومنه $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NM}$

وبالتالي : MNPQ متوازي الأضلاع.

تمرين 10:

ليكن ABC مثلثا و G مركز ثقل المثلث ABC.

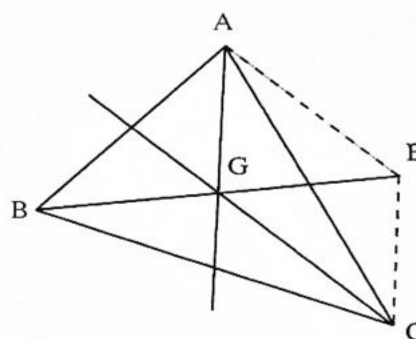
1 - أنشئ النقطة G. والنقطة E بحيث :

$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}$

2 - أثبت أن G منتصف [BE].

الجواب :

1 – مركز ثقل المثلث ABC هو النقطة G نقطة تلاقي المتوسطات.



لدينا $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}$ يعني GAEC متوازي الأضلاع.

2 – لدينا G مركز نقل المثلث ABC إذن :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

يعني $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}$

ونعلم أن $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}$

إذن $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GE}$

ومنه G منتصف [BE].

تمرين 11:

نعتبر المثلث ABC في المستوى (P).

1 - لتكن المتجهة :

$\vec{u} = 4\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{5}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

بين أن المتجهة $\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}$ مستقيمتان.

2 - لتكن المتجهة :

$\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

أ – أحسب $\vec{v}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

ب – بين أن $\vec{v}$ و $\vec{W}$ مستقيميتان علما أن :

$\vec{W} = 9\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

الجواب :

1 - لدينا

$\vec{u} = 4\overrightarrow{AB} - \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

ومنه : $\vec{u} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

وهذا يعني أن $\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}$ مستقيميتان.

2 - أ – لدينا :

$\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

إذن : $\vec{v} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

ب – لدينا : $\vec{W} = 9\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

$= -3(-3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$

$= -6(-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC})$

$\vec{W} = -6\vec{v}$

ومنه $\vec{v}$ و $\vec{W}$ مستقيميتان.

تمرين 12:

ABC مثلث.

1 - نعتبر النقطتين D و E حيث :

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$

و $\overrightarrow{BD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}$

بين أن النقط B و D و E مستقيمية.

2 - نعتبر النقطتين F و H حيث :

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{BC}$

أ – أنشئ النقطتين F و H .

ب – بين أن النقط F و H و C مستقيمية.

الجواب :

1 - لدينا : $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$

$= -\frac{2}{5}(-\frac{5}{4}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA})$

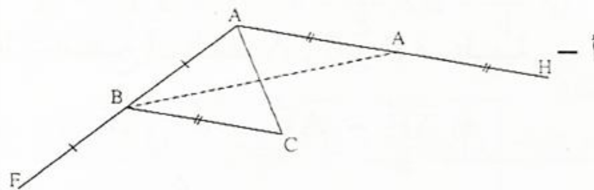
$= -\frac{2}{5}(\frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA})$

أي $\overrightarrow{BE} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{BD}$

وهذا يعني أن النقط B و D و E نقط مستقيمية.

2 -

أ –



ب – لدينا : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{BC}$

ومنه $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{BC}$

يعني : $\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$

لدينا كذلك :

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}$

$= -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$

$= -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

$= -2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$

إذن : $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{CH}$

ومنه H، C، F نقط مستقيمية.

يمكن أن نلاحظ أن C منتصف [FH].

تمرين 13:

نعتبر متوزاي الأضلاع ABCD.

1 - لتكن E بحيث : $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

a - أنشئ النقطة E.

b - بين أن $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

واستنتج $\overrightarrow{AE}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$.

2 - لتكن F النقطة المعرفة ب : $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{DC}$

a - أنشئ النقطة.

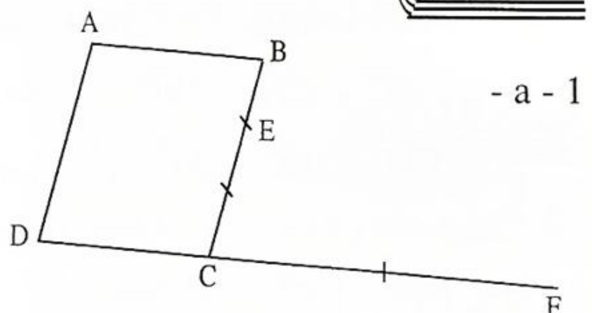
b - بين أن $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{DC}$

واستنتج $\overrightarrow{EF}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$.

3 - استنتج أن النقط A , E و F مستقيمية.

4 - بين أن $3\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \vec{0}$

الجواب :



1 - a -

b - $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

إذن : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

لدينا ABCD متوازي الأضلاع إذن :

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

ومنه : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

2 - a - الإنشاء : (انظر الشكل).

b - لدينا $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF}$

إذن $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{DC}$

لدينا $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{DC}$

$= -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}$

ومنه $\boxed{\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}}$

3 -

لدينا $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

$= 2\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$

إذن $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AE}$

وبالتالي A , E , F نقط مستقيمية.

4 - $3\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{EF}$

$= 2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AE}$

إذن $3\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \vec{0}$

تمرين 14 :

ليكن ABC مثلث بحيث I . J و K ثلاث نقط

بحيث $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

1 - أنشئ النقط I, J, K.

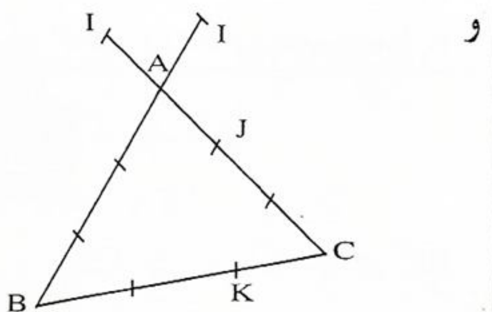
2 - أكتب $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

3 - استنتج أن J منتصف [IK].

الجواب :

1 - لدينا $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ أي $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

و $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$



2 - لدينا : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$

$\boxed{\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$

لدينا $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{Bk}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$= \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

3 – لدينا : $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$= 2\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

ومنه $\overrightarrow{IK} = 2\,\overrightarrow{IJ}$

ومنه J منتصف [IK].

تمرين 15:

ليكن ABCD متوازي الأضلاع.

I , J , k ثلاث نقط بحيث $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ و K بحيث D منتصف [KC].

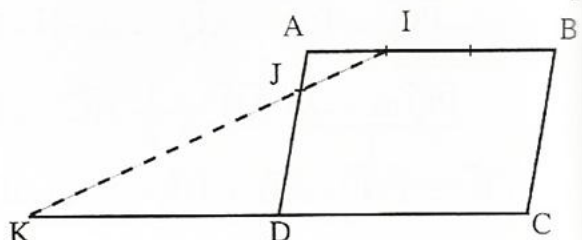
1 - أنشئ النقط I, J, K .

2 - أكتب $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$.

3 - استنتج أن I, J, K نقط مستقيمة.

الجواب :

1 -



2 - لدينا

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

ومنه

$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{Ik} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}$

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

ومنه : إذن : $\overrightarrow{Ik} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

3 - لدينا : $\overrightarrow{Ik} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$= 4\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$

إذن : $\overrightarrow{Ik} = 4\,\overrightarrow{IJ}$

وبالتالي I , J , K نقط مستقيمة.

تمرين 16:

ABC مثلث في المستوى.

نعتبر النقطتين E و D حيث $3\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$

و $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{BC}$

1 - أنشئ الشكل.

2 - أ – بين أن : $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

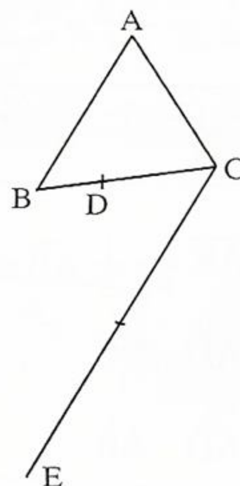
وحدد $\overrightarrow{AE}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

ب – استنتج أن النقط A و E و D مستقيمية.

بين أن : $\|\overrightarrow{AD}\| \leqslant \frac{1}{3}\left(\|\overrightarrow{CE}\| + \|\overrightarrow{AC}\|\right)$

الجواب :

- 1



لدينا $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

2 - أ – لدينا : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

إذن $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

لدينا : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$

إذن $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$

ب – لدينا : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB})$

إذن $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

ومنه A , D , E نقط مستقيمية

3 - لدينا : $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AC})$

إذن

$\|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{CE}\| + \|\overrightarrow{AC}\| \leqslant \frac{1}{3}(\|\overrightarrow{CE}\| + \|\overrightarrow{AC}\|)$

وبالتالي :

$\|\overrightarrow{AD}\| \leqslant \frac{1}{3}(\|\overrightarrow{CE}\| + \|\overrightarrow{AC}\|)$

تمرين 17 :

ABC مثلث و P و Q و R ثلاث نقط حيث :

$\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PA} = \vec{0}$ و Q منتصف [AC]

و R مماثلة بالنسبة للنقطة C.

1 - أنشئ النقط P , Q و R.

2 - أ – حدد كلا من المتجهتين $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ بدلالة المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

ب – استنتج أن النقط P و Q و R مستقيمية.

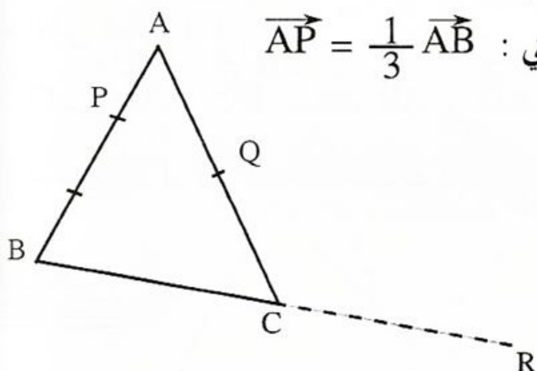
الجواب :

1 - لدينا $\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PA} = \vec{0}$

يعني : $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{PA} = \vec{0}$

يعني : $2\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{AB}$

يعني : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$



2 - أ – لدينا $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ}$

إذن $\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

ولدينا : $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BR}$

$= -\frac{1}{3}\vec{AB} + \vec{AB} + 2\vec{BC}$

$= \frac{2}{3}\vec{AB} + 2\vec{AC} - 2\vec{AB}$

إذن : $\vec{PR} = -\frac{4}{3}\vec{AB} + 2\vec{AC}$

ب – لدينا : $\vec{PR} = -\frac{4}{3}\vec{AB} + 2\vec{AC}$

$= 4\left(-\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}\right)$

ومنه : $\vec{PR} = 4\vec{PQ}$

وبالتالي P , Q و R نقط مستقيمية.

تمرين 18:

ليكن ABCD متوازي الأضلاع و E و F و G ثلاث نقط بحيث : D منتصف [EC]،
$\vec{AF} = \frac{4}{5}\vec{AD}$ و $\vec{BG} = \frac{3}{5}\vec{BC}$

1 - أنشئ النقط E , F و G.

2 - بين أن : $\vec{EF} = \vec{AB} - \frac{1}{5}\vec{BC}$

3 - أكتب $\vec{EG}$ بدلالة $\vec{AB}$ و $\vec{BC}$.

4 - استنتج أن F منتصف [EG].

5 - لتكن H بحيث $\vec{BH} = \vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{BC}$.

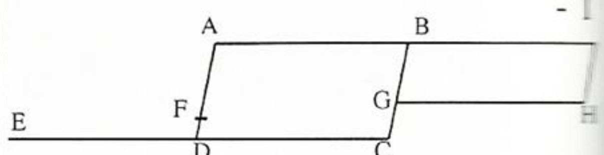
a - أنشئ النقطة H.

b - بين أن : $\vec{EH} - 3\vec{EF} = \vec{0}$

c - استنتج أن E , H , F نقط مستقيمية.

الجواب :

1 -



2 - لدينا : $\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AF}$

$= \vec{ED} + \vec{DA} + \frac{4}{5}\vec{AD}$

$= \vec{DC} - \frac{1}{5}\vec{AD}$

إذن : $\boxed{\vec{EF} = \vec{AB} - \frac{1}{5}\vec{BC}}$

3 - لدينا : $\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BG}$

$= \vec{ED} + \vec{DA} + \vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{BC}$

$= \vec{DC} - \vec{BC} + \vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{BC}$

$= \vec{AB} - \vec{BC} + \vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{BC}$

إذن : $\boxed{\vec{EG} = 2\vec{AB} - \frac{2}{5}\vec{BC}}$

4 - لدينا : $\vec{EG} = 2\vec{AB} - \frac{2}{5}\vec{BC}$

$= 2\left(\vec{AB} - \frac{1}{5}\vec{BC}\right)$

إذن : $\vec{EG} = 2\vec{EF}$

وبالتالي F منتصف [EG].

5 - لإنشاء النقطة H ننشئ مجموع المتجهتين $\vec{AB}$ و $\frac{2}{5}\vec{BC}$.

لدينا :

$\vec{EH} - 3\vec{EF} = \vec{EG} + \vec{GB} + \vec{BH} - 3\left(\vec{AB} - \frac{1}{5}\vec{BC}\right)$

$= 2\vec{AB} - \frac{2}{5}\vec{BC} = \frac{3}{5}\vec{BC} + \vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{BC}$

$- 3\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{BC}$

$= \vec{0}$

وبالتالي : $\vec{EH} - 3\vec{EF} = \vec{0}$

لدينا $\vec{EH} - 3\vec{EF} = \vec{0}$ يعني $\vec{EH} = 3\vec{EF}$

ومنه E , F , H نقط مستقيمية.





تمرين 1 :

ABCD متوازي الأضلاع

1) - أنشئ النقطتين E و F حيث :

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FC}$

2) - بين أن $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{ED}$.

3) - لتكن النقطة I منتصف القطعة [AD]

و J منتصف القطعة [BC] بين أن $(IJ)/\!/(AB)$ ثم استنتج طبيعة الرباعي IEJF.

تمرين 2 :

ABCD متوازي الأضلاع.

1) - أنشئ النقطتين E و F بحيث

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BD}$

2) - بين أن منتصف D القطعتين [AF] و [CE] ثم استنتج طبيعة الرباعي AEFC.

تمرين 3 :

A و B نقطتان مختلفتان في المستوى (P).

1) - أنشئ النقطة E بحيث :

$$3\overrightarrow{EA} - 5\overrightarrow{EB} = \vec{0}$$

2) - M نقطة من المستوى (P).

أ – حدد المتجهة $3\overrightarrow{EA} - 5\overrightarrow{EB}$

بدلالة المتجهة : $\overrightarrow{EM}$



ب – حدد مجموعة النقط M من المستوى (P) حيث : $\|3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\|=6$

تمرين 4 :

ABC مثلث في المستوى (P).

1) - أنشئ النقطتين D و E حيث

$\overrightarrow{AE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$

2) - أنشئ النقطتين I و J حيث :

$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

3) - بين أن النقط A و I و J مستقيمية.

تمرين 5 :

DCBA متوازي الأضلاع.

E و F و G ثلاث نقط حيث :

$\overrightarrow{EG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{FE}$ و $\overrightarrow{CF}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$

و $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$

1) - أنشئ الشكل.

2) - بين أن الرباعي EDFC متوازي الأضلاع.

3) - أ – حدد المتجهة $\overrightarrow{BF}$ بدلالة المتجهة $\overrightarrow{AE}$ و المتجهة $\overrightarrow{FG}$ بدلالة $\overrightarrow{EG}$.

ب – بين أن A و B و G مستقيمية.

تمرين 6:

ABC مثلث في المستوى (P).

نعتبر النقطتين K و L حيث : $2\overrightarrow{LB}+3\overrightarrow{LC}=\vec{0}$

و $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

1 - أ – بين أن : $\overrightarrow{BL}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$



و $\overrightarrow{AK} = +\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

ب – أنشئ النقطتين K و L.

2) - بين أن النقط A و K و L مستقيمية.

تمرين 7 :

نعتبر المثلث DIM و A منتصف القطعة [DM].

1) - أنشئ النقطتين T و H

حيث $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IM}$ و $\overrightarrow{DT} = 4\overrightarrow{DI}$

2) - حدد كل من المتجهتين $\overrightarrow{TH}$ و $\overrightarrow{IA}$ بدلالة المتجهتين $\overrightarrow{IM}$ و $\overrightarrow{ID}$.

3) - بين أن : $(TH) \parallel (IA)$.

تمرين 8 :

ABC مثلث في المستوى (P) و M نقطة خارجه.

1) - أنشئ النقط D و E و F المعرفة بمايلي :

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}$$

2) - بين أن ABCD و ACBE متوازي الأضلاع ثم استنتج أن A منتصف [ED].

3) - بين أن : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$

تمرين 9 :

ليكن ABC مثلثا و D نقطة من المستوى بحيث $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

1 - أنشئ النقطة D ثم النقطة G حيث :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

2 - بين أن النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.



- نعتبر النقطتين E و F المعرفتين بمايلي.

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{GB}$ و $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CC}$

- أنشئ النقطتين E و F.

ب – ماهي طبيعة الرباعي AGEB ؟

ج – بين أن النقط E و F و B مستقيمية وأن I منتصف [BF].

4 - لتكن النقطة I منتصف [EF] أثبت أن المتجهتين $\overrightarrow{DI}$ و $\overrightarrow{CB}$ مستقيميتان.

(أكاديمة القنيطرة 89).

تمرين 10 :

ABCD متوازي الأضلاع و E نقطة من المستوى (P) حيث : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

و G نقطة من المستوى (P) حيث :

$$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GD} + 2\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{0}$$

1 - بين أن : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2 - ليكن I منتصف [AB]. المستقيم (ED) يقطع (BC) في F و (IC) في H.

أ – بين أن $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

ب – استنتج أن F مركز ثقل المثلث ECI.



الإسقاط

- عدد الصفحات : [15]
- عدد التمارين : [11]
- عدد تمارين البحث : [05]



6 الاسقاط

1 تعريف :

ليكن (D) و(Δ) مستقيمين متقاطعين في المستوى (p) وM نقطة من المستوى (p).

مسقط M على (D) بتواز مع (Δ) هو النقطة 'M المحددة بتقاطع (D) مع الموازي لــ(Δ) الذي يمر من M.

اسقاط المستوى (p) على المستقيم (D) بتواز مع (Δ) هو التطبيق من (p) نحو (D) حيث تكون صورة كل نقطة M من (p) هي مسقطها 'M على (D) بتواز مع (Δ).

(Δ) M O M' (D)

ملاحظة :

(D) هو مجموع النقط الصامدة بالاسقاط على (D) بتواز مع (Δ).

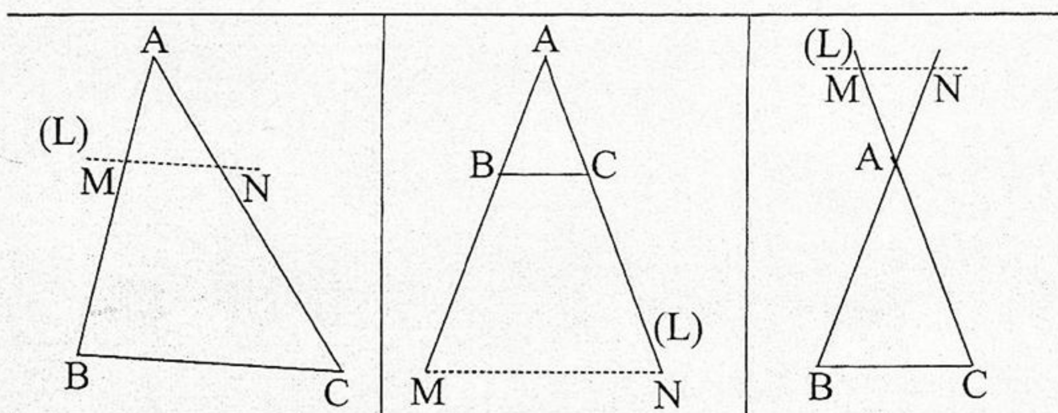
حالة خاصة : الاسقاط العمودي على مستقيم

H نقطة تقاطع (D) والمستقيم المار من M والعمودي على (D).

H تسمى المسقط العمودي لــM على المستقيم (D)

M H (D)

2 - مبرهنة طاليس وطاليس العكسية :



خاصية طاليس : ABC مثلث معلوم وA وB وM مستقيمية، وA وC وN مستقيمية في هذا الترتيب و (MN) // (BC) فإن $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

خاصية طاليس العكسية : ABC مثلث معلوم و A و B و M مستقيمية، و A و C و N مستقيمية.

في هذا الترتيب و $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ فإن $(MN) // (BC)$

خاصية 1 : ليكن (D) و(Δ) مستقيمين متقاطعين و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتين مستقيميتين بحيث: $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$.

إذا كانت A' و B' و C' و D' هي مساقط A و B و C و D بالتوالي على المستقيم (D) بتواز مع المستقيم (Δ) فإن : $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{A'B'}$

نقول إن الاسقاط يحافظ على معامل استقامية متجهتين .

خاصية 2 : A و B نقطتان و I منتصف [AB]

إذا كانت A' و B' و I' هي مساقط A و B و I بالتوالي على المستقيم (D) بتواز مع مستقيم (Δ) فإن النقطة I' هي منتصف القطعة [A'B'] نقول إن الاسقاط يحافظ على منتصف قطعة .

خاصية 3 : ABC مثلث معلوم إذا كانت I و J منتصفي [AB] و [AC] فإن $\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{IJ}$

تمارين وحلولها

تمرين 1 :

نعتبر مثلثا ABC

1 - أنشئ نقطة D من المستقيم (AB) حيث: $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

2 - المستقيم الموازي لـ (BC) يقطع (AC) في E .

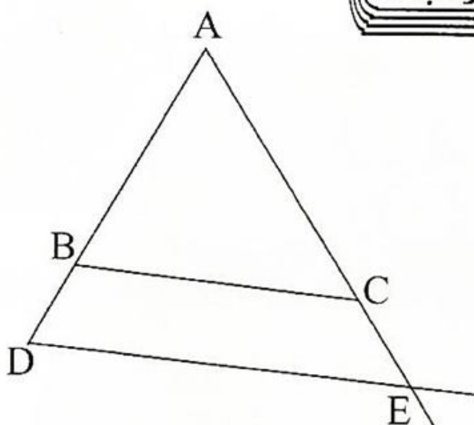
أ - حدد DE بدلالة BC

ب - بين أن :

$\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

الجواب :

1 -



2 - أ - ADE مثلث .

لدينا A و B و D مستقيمية، وA وC وE مستقيمية

في هذا الترتيب و (DE) // (BC)

إذن حسب خاصية طاليس المباشرة :

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

لدينا $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ و $AD=\frac{3}{2}AB$

ومنه $\frac{AD}{AB}=\frac{3}{2}$

وبالتالي : $\frac{DE}{BC}=\frac{3}{2}$

أي أن : $DE=\frac{3}{2}BC$

ب - لدينا $DE=\frac{3}{2}BC$

و $\overrightarrow{DE}$ و $\overrightarrow{BC}$ مستقيميتان ولهما نفس المنحى

إذن : $\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

لدينا $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{3}{2}$

إذن $AE=\frac{3}{2}AC$

وبما أن $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتان ولهما نفس المنحى فإن :

$$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

تمرين 2 :

1) ABC مثلثا و D نقطة بحيث :

$$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

النقطة E هي مسقط D على (AC) بتواز مع (BC)

حدد العدد x الحقيقي حيث $\overrightarrow{CE}=x\overrightarrow{AC}$

2) ليكن ABC مثلثا، نعتبر نقطة D من المستقيم (AB) ونقطة E من المستقيم (AC)

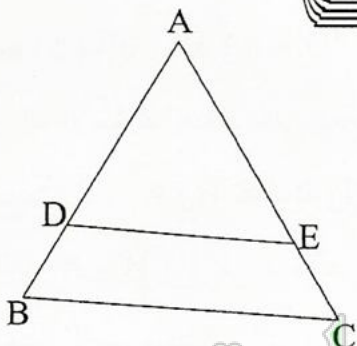
حيث : $\overrightarrow{DE}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{BC}$

حدد العددين الحقيقيين x و y حيث $\overrightarrow{DA}=x\overrightarrow{DB}$

و $\overrightarrow{CE}=y\overrightarrow{CA}$

الجواب :

1)



لدينا ABC مثلثا و (MN) // (BC)

و $D\in[AB]$ و $E\in[AC]$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

لدينا $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ إذن $\frac{AD}{AB}=\frac{2}{3}$

ومنه $\frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}$

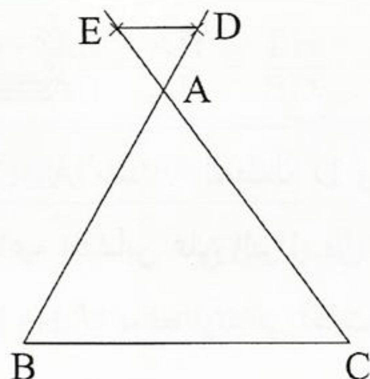
وبما أن $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتان ولهما نفس المنحى فإن : $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

إذن $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

ومنه $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}$

إذن : $\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

2)



لدينا $(ED)//(BC)$ و A و E و C مستقيمية، A وD وB مستقيمية في هذا الترتيب إذن حسب خاصية طاليس المباشرة فإن :

$$\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$$

لدينا $\overrightarrow{DE}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{BC}$ إذن $\frac{DE}{BC}=\frac{1}{4}$

ومنه $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{4}$ وبما أن $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$ مستقيميتان وهما منحنيان متعاكسان فإن :

$$\overrightarrow{AD}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AD}=\frac{-1}{4}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})$$

إذن $\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{DB}$

أي أن $\frac{5}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{DB}$

إذن : $5\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{DB}$

$$-5\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{DB}$$

إذن : $\boxed{\overrightarrow{DA}=\frac{1}{5}\overrightarrow{DB}}$

لدينا : $\frac{AE}{AC}=\frac{1}{4}$

وبما أن $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتان وهما منحيان متعاكسان فإن :

$$\overrightarrow{AE}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{AC}$$

إذن : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{AC}$

ومنه $\overrightarrow{CE}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}$

إذن : $\overrightarrow{CE}=\frac{-5}{4}\overrightarrow{AC}$

إذن : $\boxed{\overrightarrow{CE}=\frac{5}{4}\overrightarrow{CA}}$

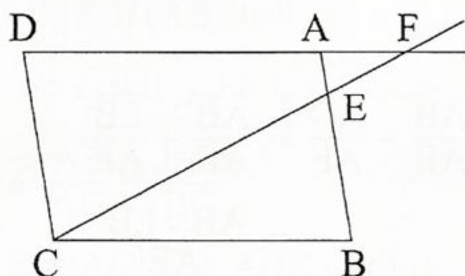
تمرين 3 :

ABCD متوازي الاضلاع و(Δ) مستقيما متغيرا مارا من النقطة C ويقطع المسقيم $[AB]$ في E والمستقيم (AD) في F.

1) قارن النسبتين $\frac{AD}{AF}$ و $\frac{BE}{AE}$

2) استنتج أن : $\frac{AD}{AF}-\frac{AB}{AE}=1$

الجواب :



1) نعتبر المثلث FDC

لدينا F و A و D مستقيمية، F و E و C مستقيمية في هذا الترتيب و $(AE)//(DC)$



إذن حسب خاصية طاليس المباشرة :

$$\frac{FD}{FA}=\frac{FC}{FE}=\frac{DC}{AE}$$

لدينا كذلك A وE وB مستقيمية، وF وE وC مستقيمية في هذا الترتيب و (AF) // (BC)

إذن حسب خاصية طاليس المباشرة :

$$\frac{EB}{EA}=\frac{EC}{EF}=\frac{BC}{AF}$$

إذن : $\frac{EB}{EA}=\frac{EC}{EF}$ ①

ولدينا $\frac{FD}{FA}=\frac{FC}{FE}$

إذن : $\frac{FA+AD}{FA}=\frac{FE+EC}{FE}$

إذن : $1+\frac{AD}{FA}=1+\frac{FC}{FE}$

ومنه $\frac{AD}{FA}=\frac{EC}{FE}$ ②

من ① و② نستنتج أن : :

$$\frac{EB}{EA}=\frac{AD}{AF}$$

2) لدينا

$$\frac{AB}{AE}-\frac{AD}{AF}=\frac{AB}{AE}-\frac{EB}{AE}$$

$$=\frac{AB-EB}{AE}$$

$$=\frac{AE}{AE}$$

$$=1$$

إذن : $\frac{AB}{AE}-\frac{AD}{AF}=1$

تمرين 4 :

ليكن ABC مثلثا . النقطتان D و E هما موقعا ارتفاعيه المنشأين على التوالي من B وC.
النقطتان F وH هما موقعا ارتفاعي المثلث ADE على التوالي من D وE.

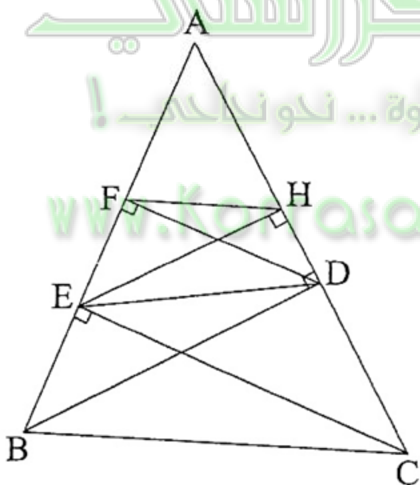
1) - أنشئ الشكل

2) - حدد صيغتين مختلفتين للجداء AE × AD

3) - أثبت أن : (FH) // (BC)

الجواب :

(1



2) نعتبر المثلث ABC

لدينا (BD) ⊥ (AD) و (EH) ⊥ (AD)

إذن : (EH) // (BD)

وA وH وD مستقيمية،وA وE وB مستقيمية في هذا الترتيب

إذن حسب خاصية طاليس المباشرة :

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AH}{AD}=\frac{EH}{BD}$$

إذن : $AB \times AH = AE \times AD$

نعتبر المثلث AEC

لدينا $(AE) \perp (EC)$ و $(AE) \perp (DF)$

إذن : $(EC) // (DF)$

وA وD وC مستقيمية، وA و E و F مستقيمية في هذا الترتيب .

إذن $\frac{AF}{AE}=\frac{AD}{AC}=\frac{FD}{EC}$

إذن : $AF \times AC = AE \times AD$

3) لدينا $AE \times AD = AB \times AH$

و $AE \times AD = AF \times AC$

إذن : $AB \times AH = AF \times AC$

ومنه : $\frac{AB}{AF}=\frac{AC}{AH}$

ولدينا A وH و C مستقيمية، وA وF وB مستقيمية في هذا الترتيب

إذن حسب خاصية طاليس االعكسية :

$(FH) // (BC)$

تمرين 5 :

ABC مثلث و $M \in [AB]$ و E هي مسقط النقطة M على (AB) بتواز مع (AC). F هي مسقط النقطة M على (AC) بتواز مع (AB)

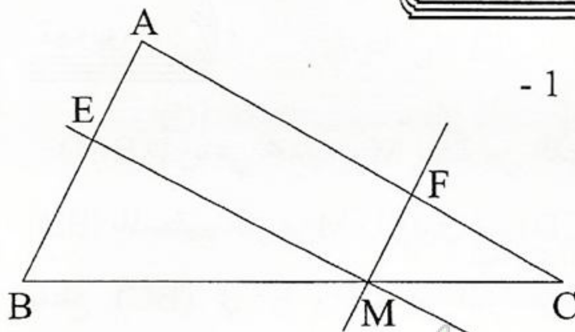
1 - قارن الخارجين : $\frac{AE}{AB}$ و $\frac{CM}{CB}$

ثم الخارجين : $\frac{AF}{AC}$ و $\frac{BM}{BC}$

2 - حدد موضع M على [AB] بحيث يكون $(EF) // (BC)$

الجواب :

- 1



في المثلث ABC مثلث لدينا $E \in [AB]$ و $M \in [BC]$

ولدينا $(EM) // (AC)$ إذن حسب خاصية طاليس المباشرة فإن : $\frac{CM}{CB}=\frac{AE}{AB}$ ①

في المثلث ABC دائما لدينا $F \in [AC]$ و $M \in [AB]$ ولدينا $(MF) // (AB)$

إذن حسب خاصية طاليس المباشرة فإن :

$\frac{BM}{BC}=\frac{AF}{AC}$ ②

2 - في المثلث ABC لدينا $E \in [AC]$ و $F \in [AC]$ ولدينا $(EF) // (BC)$

إذن حسب المبرهنة العكسية لطاليس فإن :

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$$

إذن من ① و② نستنتج أن : :

$$\frac{CM}{CB}=\frac{BM}{BC}$$

ومنه : $CM = BM$

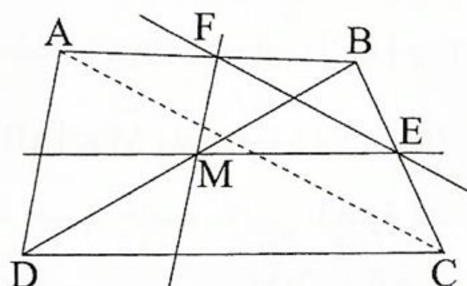
وحيث أن $M \in [BC]$ فهذا يعني M منتصف $[BC]$.

تمرين 6 :

ABCD رباعي محدب و M نقطة من القطر $[BD]$، المستقيم المار من M والموازي لـ (CD) يقطع (BC) في E والمستقيم المار من M والموازي لـ (AD) يقطع (AB) في F.

بين أن : $(EF) // (AC)$

الجواب :



لدينا في المثلث ABD و$F \in [AB]$

و $M \in [BD]$ ولدينا $(MF) // (AD)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة فإن :

$$① \quad \frac{BF}{BA}=\frac{BM}{BD}$$

في المثلث DBC ولدينا $M \in [BD]$

و $E \in [BC]$ و $(DC) // (ME)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة فإن :

$$② \quad \frac{BM}{BD}=\frac{BE}{BC}$$

من ① و② نستنتج أن : :

$$\frac{BF}{BA}=\frac{BE}{BC}$$

إذن في المثلث ABC لدينا $E \in [BC]$

و $F \in [AB]$ و $(EF) // (AC)$

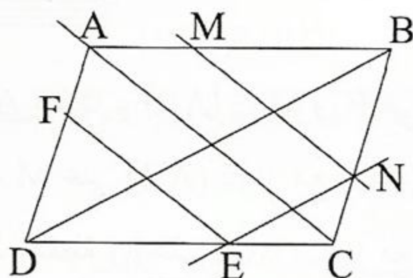
ومنه حسب مبرهنة طاليس العكسية فإن :

$(AC) // (EF)$

تمرين 7 :

ABCD متوازي أضلاع، $M \in [AB]$، الموازي لـ (AC) المار من M يقطع (BC) في N والموازي لـ (BD) المار من N يقطع (CD) في E والموازي لـ (AC) المار من E يقطع (AD) في F بين أن : $(MF) // (BD)$

الجواب :



لدينا في المثلث ABD و$M \in [AB]$

و $N \in [BC]$ ولدينا $(MN) // (AC)$

إذن حسب مبرهنة طاليس فإن :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CB} \quad ①$$

في المثلث BCD ولدينا $N \in [CB]$

و $E \in [CD]$ و $(EN) // (BD)$

ومنه حسب مبرهنة طاليس فإن :

$$\frac{CN}{CB} = \frac{CE}{CD} \quad ②$$

في المثلث ACD ولدينا $E \in [DC]$

و $F \in [DA]$ و $(EF) // (AC)$

إذن حسب مبرهنة طاليس فإن :

$$\frac{CE}{CD} = \frac{AF}{AD} \quad ③$$

إذن من ① و② و③ فإن :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AF}{AD}$$

إذن في المثلث ABD لدينا $M \in [AB]$

و $F \in [AD]$ و $\frac{AM}{AB} = \frac{AF}{AD}$

ومنه حسب مبرهنة طاليس العكسية فإن :

$$(MF) // (BD)$$

تمرين 8 :

1) ABCD متوازي أضلاع و(Δ) مستقيما مارا من النقطة A خارج متوازي الاضلاع ABCD .

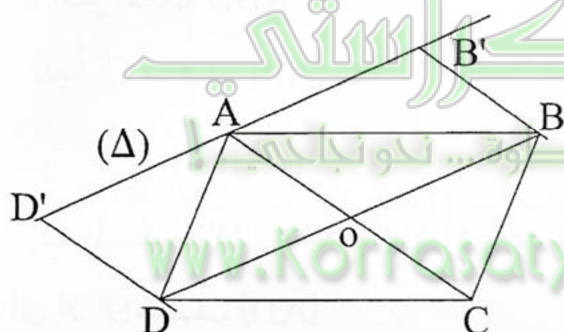
النقطتان 'B و'D لهما مسقطا B وD على (Δ) بتواز مع (AC)

أثبت أن النقطةA منتصف القطعة [B'D'] .

2) ليكن ABC مثلثا، النقط 'B و'C وD و'D هي منتصفات القطع [AC] و[AB] و[BC] و [B'C'] على التوالي.

أثبت أن 'D منتصف القطعة [AD]

الجواب :



1) ليكن o مركز متوازي الاضلاع

إذن o منتصف القطعة [DB]

نعتبر الاسقاط على (Δ) بتواز مع (AC)

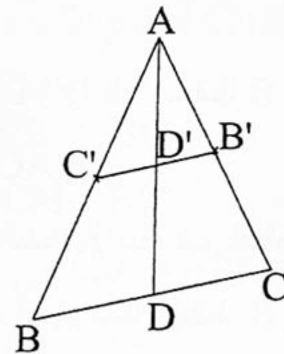
لدينا

p (D) = D' و p (B) = B' و p (o) = A

وبما ان الاسقاط يحافظ على منتصف قطعة فإن

A منتصف القطعة [B'D']

2)



نعتبر المثلث ABC

لدينا 'B منتصف [AC]

'C منتصف [AB]

إذن (B'C') // (BC)

ومنه (C'D') // (BD)

نعتبر المثلث ABD

لدينا 'C منتصف [AB]

و (C'D') // (BD)

إذن المستقيم (C'D') يقطع [AD] في منتصفها

أي أن 'Dمنتصف [AD]

تمرين 9 :

ليكن ABC مثلثا وI منتصف القطعة [BC] .

النقطةEهي للمسقط العمودي للنقطةBعلى(AI)

والنقطةFهي للمسقط العمودي للنقطة C على(AI)

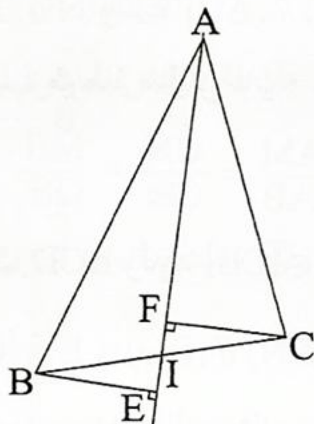
1) - أثبت أن I منتصف [EF]

2) - أثبت أن النقطتين B وC متساويتا المسافة

عن المستقيم المتوسط (AI).

الجواب :

1)



نعتبرp الاسقاط العمودي على (AI)

لدينا I منتصف القطعة [BC]

p (C) = Fو p (B) = E و p (I) = I

إذن p (I) منتصف القطعة [EF]

لأن الاسقاط يحافظ على منتصف قطعة

وبالتالي I منتصف القطعة [EF]

2) لدينا I منتصف القطعتين [BC] و [EF]

إذن الرباعي BECF متوازي الاضلاع

وبالتالي : CF = BE

إذن B وC متساويتا المسافة عن المستقيم المتوسط (AI).

تمرين 10 : (مبرهنة سيفا ceva)

ABC مثلث نعتبر ثلاثة مستقيمات متوازية

تمر على التوالي من Aو Bو C وتقطع (BC)

و(AC) و(AB) في T وS وR على التوالي

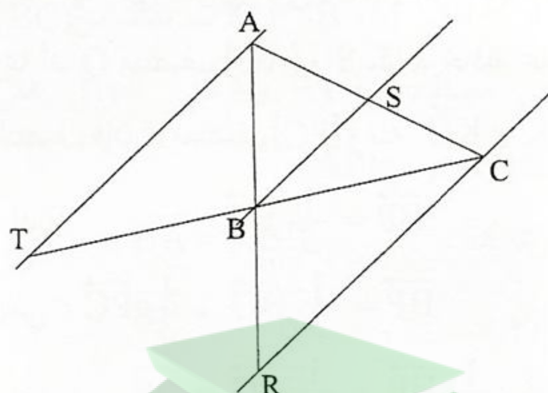
1 - قارن النسبتين $\frac{TB}{TC}$ و $\frac{AB}{AR}$

ثم النسبتين $\frac{SC}{SA}$ و $\frac{BR}{BA}$

2 - أحسب قيمة الجداء

$$\frac{TB}{TC} \times \frac{SC}{SA} \times \frac{RA}{RB}$$

الجواب :



في المثلث ARC لدينا : $S \in [AC]$

و $B \in [AR]$ و $(RS) // (RC)$

إذن حسب مبرهنة طاليس فإن :

$$① \quad \frac{AB}{AR} = \frac{AS}{AC}$$

في المثلث SAT لدينا : $S \in [AC]$

و $B \in [CT]$ و $(BS) // (AT)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة فإن :

$$② \quad \frac{TB}{TC} = \frac{AS}{AC}$$

من ① و② فإن :

$$\boxed{\frac{AB}{AR} = \frac{TB}{TC}}$$

في المثلث ACR لدينا : $S \in [AC]$

و $B \in [AR]$ و $(BS) // (RC)$

إذن حسب مبرهنة طاليس فإن :

$$\boxed{\frac{SC}{SA} = \frac{BR}{BA}}$$

2 - لدينا

$$\frac{TB}{TC} \times \frac{SC}{SA} \times \frac{RA}{RB}$$
$$= \frac{AB}{AR} \times \frac{BR}{BA} \times \frac{BA}{RB} = 1$$

وبالتالي :

$$\frac{TB}{TC} \times \frac{SC}{SA} \times \frac{RA}{RB} = 1$$

تمرين 11 :

ليكن ABC مثلثا وQ منتصف القطعة [AC]

وP من (BC) بحيث : $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

1 - لتكن J نقطة تقاطع (AC) مع الموازي للمستقيم (BQ) المار من النقطة P ولتكن I نقطة تقاطع (AP) و(BQ).

أثبت أن $\overrightarrow{QC} = 3\,\overrightarrow{QJ}$

استنتج أن $\overrightarrow{JA} = 4\,\overrightarrow{JQ}$ و $\overrightarrow{PA} = 4\,\overrightarrow{PI}$

2 - لتكن K نقطة تقاطع (BC) والموازي للمستقيم (AP) المار Q .

أثبت أن $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{KC}$ و $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PK}$

3 - لتكن R نقطة تقاطع (CI) و(AB) وL نقطة تقاطع (AB) والموازي للمستقيم (CI) المار Q .

أثبت أن $\overrightarrow{BA} = 3\,\overrightarrow{BR}$

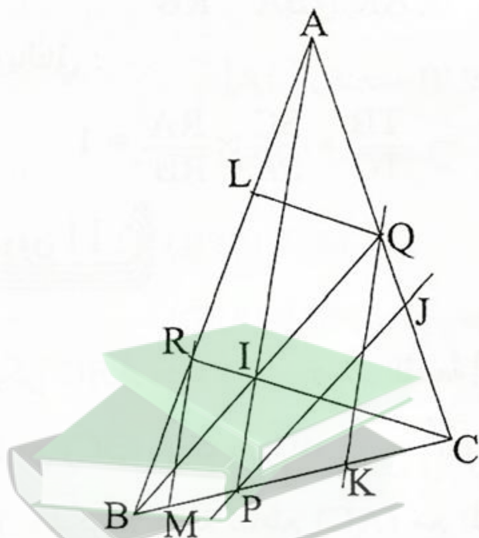
4 - لتكن M نقطة تقاطع (BC) والموازي

للمستقيم (AP) المار R .

أثبت أن $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{BM}$

استنتج أن $\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MP}$ و $\overrightarrow{RC} = 4\overrightarrow{RI}$

الجواب :



1 - لدينا C ، P، B ثلاث نقط من (BC) و C و Q و J مساقطها على (AC) بتواز مع (BQ)

وبما أن $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

والاسقاط يحافظ على الاستقامية ومعاملها فإن :

$\overrightarrow{QJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{QC}$ أي $\overrightarrow{QC} = 3\overrightarrow{QJ}$

لدينا $\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{JQ} + \overrightarrow{QA}$

يعني $\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{JQ} + \overrightarrow{CQ}$

يعني $\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{JQ} + 3\overrightarrow{JQ}$

وبالتالي $\overrightarrow{JA} = 4\overrightarrow{JQ}$

في المثلث APJ لدينا: $I \in [AP]$ و $Q \in [AJ]$

و $(IQ) // (PJ)$

إذن :A و I و P مساقط A و Q و J على التوالي على (AP) بتواز مع (PJ) وبما أن $\overrightarrow{JA} = 4\overrightarrow{JQ}$ والاسقاط يحافظ على الاستقامية ومعاملها فإن:

$\overrightarrow{PA} = 4\overrightarrow{PI}$

2 - لدينا A ،Q، C ثلاث نقط من(AC) مساقطها على التوالي على (BC) بتوازمع(AP) وبما أن Q منتصف [AC] والاسقاط يحافظ على المنتصف فإن K منتصف [PC] ومنه $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{KC}$

لدينا $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

يعني : $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$

يعني : $\overrightarrow{BP} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$

يعني : $\frac{2}{3}\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$

يعني : $2\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PC}$

يعني : $2\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PK}$

إذن : $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PK}$

3 - لدينا A ،L ،R ثلاث نقط من (AB) وهي مساقط A و Q و C من (AC) على التوالي بالتوازي مع (CI) وبما أن Q منتصف [AC] فإن L منتصف [AR]

إذن : $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{LR}$

كذلك في المثلث BQK لدينا : $P \in [BK]$ و P منتصف [BK] و $I \in [BK]$

و $(KQ) // (PI)$ إذن I منتصف [BQ]

بنفس الكيفية في المثلث BQL نستنتج ان R منتصف [BL] ومنه $\vec{LR}=\vec{RB}$

لدينا $\vec{BA}=\vec{BR}+\vec{RL}+\vec{LA}$

$=\vec{BR}+\vec{BR}+\vec{BR}$

ومنه $\vec{BA}=3\vec{BR}$

4 - لدينا M، B، P ثلاث نقط من (BC) وهي مساقط B و R وA على التوالي على (BC) بتواز مع (AP)

وبما أن $\vec{BA}=3\vec{BR}$

فإن $\vec{BP}=3\vec{BM}$

لدينا $\vec{BC}=3\vec{BP}$

يعني $\vec{BM}+\vec{MC}=3\vec{BM}+3\vec{MP}$

يعني $\vec{MC}=2\vec{BM}+3\vec{MP}$

يعني $\vec{MC}=\vec{MP}+3\vec{MP}$

ومنه $\vec{MC}=4\vec{MP}$

في المثلث RCM لدينا : $I\in[RC]$

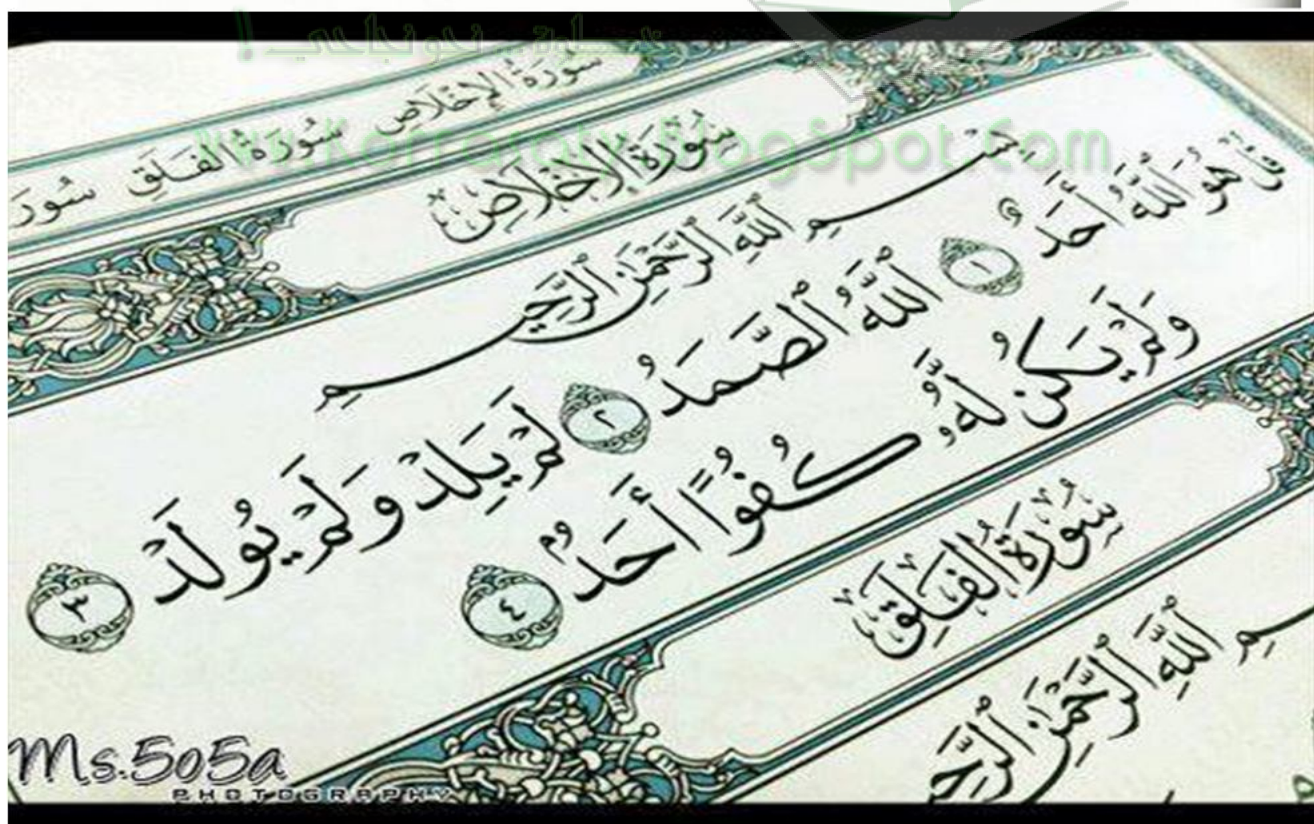
و $P\in[MC]$ و $(RM)\,//\,(IP)$

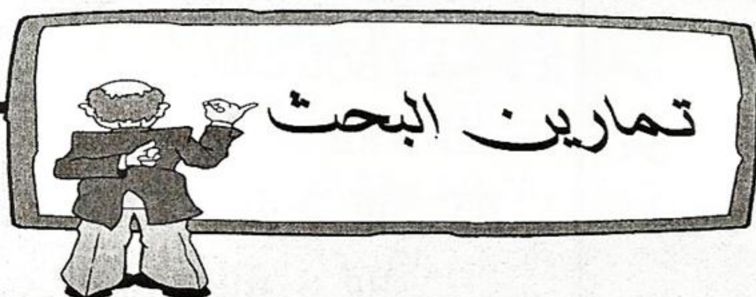
إذن حسب مبرهنة طاليس فإن :

$$\frac{RC}{RI}=\frac{MC}{MP}$$

ومنه $RC=4RI$

وبما أن $I\in[RC]$ فإن $\vec{RC}=4\vec{RI}$





تمرين 1 :

ليكن ABCD شبه منحرف و K نقطة تقاطع قطريه و I منتصف [AB]

أثبت أن المستقيم (IK) يقطع القطعة [CD] في منتصفها J

(يمكن أن نكتب $\overrightarrow{KA} = x\overrightarrow{KC}$ ثم نعبر عن $\overrightarrow{KB}$ بدلالة $\overrightarrow{KD}$)

تمرين 2 :

ليكن مثلثا ABC و I منتصف القطعة [AB] وليكن (Δ) مستقيما يوازي (AI) ويقطع المستقيمين (BC) و (AC) في النقطتين 'B و 'C على التوالي .

أثبت أن : $\frac{AB'}{AC} = \frac{AC'}{AB}$

تمرين 3 :

ABC مثلثا ،نعتبر النقطة E من القطعة [AB] و F مسقطها على المستقيم (AC) بتواز مع المستقيم (BC) ،النقطة D هي مسقط F على (BC) بتواز مع (AB)

1) - بين ان : $\frac{EF}{BC} = 1 - \frac{CD}{CB}$

2) - استنتج ان : $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$

تمرين 4 :

ليكن مثلثا ABC .

E المسقط العمودي لــ B على (AC)



D المسقط العمودي لـ C على (AB)

F المسقط العمودي لـ D على (AE)

G المسقط العمودي لـ E على (AD)

1- قارن النسبتين $\frac{AE}{AB}$ و $\frac{AG}{AD}$

ثم النسبتين $\frac{AD}{AC}$ و $\frac{AF}{AE}$

2 - استنتج ان $AD . AE = AB . AG = AC . AF$

3 - ماذا يمكن ان تقول عن المستقيمين (FG) و(BG).

تمرين 5 : (مبرهنة منلايوس menelaus)

ABC مثلث و(D) مستقيم يقطع (AB) و(AC) و(BC) في النقط R و S و T على التوالي

(R و S و T نقط مختلفة عن A و B و C) الموازي لــ(D) المار من C يقطع (AB) في I

1 - قارن النسبتين $\frac{TB}{TC}$ و $\frac{RB}{RI}$

ثم النسبتين $\frac{SC}{SA}$ و $\frac{RI}{RA}$

2 - أحسب قيمة الجداء

$$\frac{TB}{TC} \times \frac{SC}{SA} \times \frac{RA}{RB}$$



المستقيم في المستوى

- عدد الصفحات : [24]
- عدد التمارين : [20]
- عدد تمارين البحث : [08]





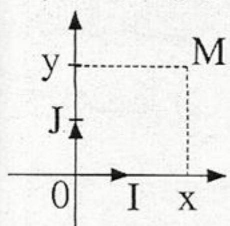
7 المستقيم في المستوى.

المعلم

o و I و J ثلاث نقط غير مستقيمية في المستوى (P) نضع $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ و $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ يسمى معلما للمستوى (P) إذا كانت $M(x, y)$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

فإن $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$



وإذا كانت $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ فإن $M(x, y)$

لدينا $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ إذن $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

I منتصف $[AB]$ إذن $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

إذا كانت $\vec{u}(\alpha, \beta)$ و $\vec{v}(\alpha', \beta')$ $k \in \mathbb{R}$ فإن :

$k\vec{u}(\alpha k, \beta k)$ و $\vec{u} + \vec{v}(\alpha + \alpha', \beta + \beta')$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان تكافئ $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

أي أن $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} = 0$

أي أن $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$

2 ـ المستقيم :

(D) مستقيما في المستوى موجه بالمتجهة $\vec{u}(\alpha, \beta)$ ويمر من النقطة $A(x_0, y_0)$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D)$ تكافئ $t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$

هذه النظمة تسمى التمثيل البارامتري للمستقيم $D(A, \vec{u})$

مبرهنة 1 : المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ كل مستقيم في المستوى له معادلة ديكارتية على الشكل $ax + by + c = 0$ حيث $(a, b) \neq (0, 0)$

ملاحظة : $M(x, y) \in (D)$ تكافئ $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$

مبرهنة 2 : المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a و b و c من $\mathbb{R}$ حيث $(a, b) \neq (0, 0)$ مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوى (P)



حيث $ax + by + c = 0$ هي مستقيم موجه بالمتجهة : $\vec{u}(-b , a)$

حالات خاصة

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$ المستقيم الموازي لمحور الأفاصيل له معادلة ديكارتية على الشكل $y = k$

المستقيم الموازي لمحور الأراتيب له معادلة ديكارتية على الشكل $x = k$

المستقيم المار من أصل المعلم له معادلة ديكارتية على الشكل $ax + by = 0$

كل مستقيم (D) لايوازي محور الأراتيب له معادلة مختزلة تكتب على الشكل $y = mx + p$

m يسمى المعامل الموجه لـ (D)

p يسمى الأرتوب عند الأصل

إذا كانت $\vec{u}(\alpha , \beta)$ متجهة موجهة لـ (D) مع $\alpha \neq 0$

فإن $m = \frac{\beta}{\alpha}$ معاملا موجها لـ (D)

3 ـ الأوضاع النسبية لمستقيمين

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

نعتبر $ax + by + c = 0$ (D) و $a'x + b'y + c' = 0$ (D')

(D) // (D') تعني أن $ab' - ba' = 0$ أي أن $\det(\vec{u}, \vec{u'}) = 0$

حيث $\vec{u}(-b , a)$ متجهة موجهة لـ (D)

حيث $\vec{u'}(-b , a)$ متجهة موجهة لـ (D')

(D) و (D') متقاطعان تعني $\det(\vec{u}, \vec{u'}) \neq 0$

وزوج احداثتي نقطة تقاطع (D) و (D')

هو حل النظمة
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

ملاحظة :

نعتبر $y = mx + p$ (D) و $y = m'x + p'$ (D')

(D) // (D') تعني أن $m = m'$

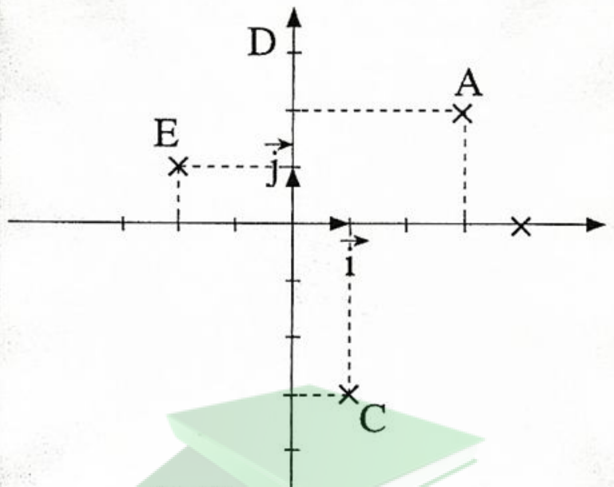


تمارين وحلولها

تمرين 1

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 – حدد إحداثياتي النقط E, D, C, B, A



2 – مثل في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ النقط التالية :

$A(2, -3)$ $B(\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$

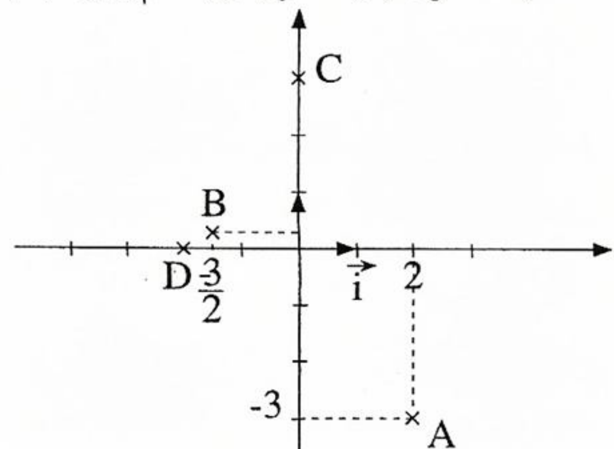
$C(0, 3)$ $D(-2, 0)$

الجواب :

1 – لدينا $C(1, -3)$ ، $B(4, 0)$

$A(3, 2)$ ، $D(0, 3)$ ، $E(-2, 1)$

2 – لدينا المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$



تمرين 2 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 – حدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$ في كل حالة :

أ – $A(1, 3)$ $B(-2, 1)$

ب – $A(-2, -1)$ $B(0, 3)$

2 – حدد إحداثيتي منتصف القطعة [AB] في كل حالة

أ – $A(1, 3)$ $B(-2, 1)$

ب – $A(\frac{-2}{3}, 2)$ $B(0, \frac{1}{2})$

الجواب :

أ - لدينا $A(1, 3)$; $B(-2, 1)$

إذن $\overrightarrow{AB}(-2 - 1, 1 - 3)$

ومنه $\overrightarrow{AB}(-3, -2)$

ب – لدينا $A(-2, -1)$ $B(0, 3)$

إذن $\overrightarrow{AB}(0 - (-2) ; 3 - (-1))$

إذن $\overrightarrow{AB}(2, 4)$

2 – أ – لدينا

$B(1, 3)$ $A(-2, 1)$

ليكن I منتصف القطعة [AB] إذن :

$I(\frac{1 + (-2)}{2} ; \frac{3 + 1}{2})$

أي أن $I(-\frac{1}{2}, 2)$

ب – لدينا $B(0, \frac{1}{2})$ $A(-\frac{2}{3}, 2)$



ليكن J منتصف [AB]

إذن $J\left(\frac{-\frac{2}{3}+0}{2} ; \frac{2+\frac{1}{2}}{2}\right)$

أي أن $J(-\frac{1}{3} ; \frac{5}{4})$

تمرين 3 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط.

$C(4 , 2)$, $B(-7 , 4)$, $A(5 , -2)$

1 – حدد إحداثيات المتجهات $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CA}$

2 – ليكن I منتصف [AC] و J منتصف [BC]

حدد احداثيتي كل من I و J

3 – حدد إحداثيتي النقطة D حيث الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

4 – حدد إحداثيتي النقطة E حيث B منتصف القطعة [EA]

5 – حدد إحداثيتي النقطة F حيث C مماثلة F بالنسبة لـ A

الجواب :

1 – لدينا : $A(5 , -2)$ و $B(-7 , 4)$

إذن : $\overrightarrow{AB}(-7 -5 ; 4 -(-2))$

أي أن $\boxed{\overrightarrow{AB}(-12 , 6)}$

لدينا $C(4 , 2)$ و $B(-7 , 4)$

$\overrightarrow{CB}(-7 - 4 ; 4 - 2)$

إذن $\boxed{\overrightarrow{CB}(-11 , 2)}$

بما أن $A(5 , -2)$ و $C(4 , 2)$

فإن $\overrightarrow{CA}(5 - 4 ; -2 - 2)$

$\boxed{\overrightarrow{CA}(1 , -4)}$

2 – لدينا $A(5 , -2)$

$C(4 , 2)$ إذن

$I\left(\frac{5+4}{2} ; \frac{-2+2}{2}\right)$

$I(\frac{1}{2} ; 0)$

لدينا $\begin{cases} B(-7 , 4) \\ C(4 , 2) \end{cases}$ إذن

$J\left(\frac{-7+4}{2} ; \frac{4+2}{2}\right)$

أي أن $\boxed{J(-\frac{3}{2} ; 3)}$

3 – نعتبر $B(x , y)$

لدينا ABCD متوازي أضلاع

يعني أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

لدينا $\overrightarrow{AB}(-12 , 6)$ و $\overrightarrow{DC}(4 - x , 2 - y)$

بما أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ فإن

$\begin{cases} 4 - x = -12 \\ 2 - y = 6 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x = 16 \\ y = -4 \end{cases}$

إذن $\boxed{D(16 , -4)}$

4 – لدينا B منتصف القطعة [EA]

إذن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$

نعتبر $E(x , y)$

لدينا $\overrightarrow{BE}(x + 7 ; y - 4)$ و $\overrightarrow{AB}(-12 ; 6)$

بما أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$





فإن $\begin{cases} x + 7 = -12 \\ y - 4 = 6 \end{cases}$ إذن

إذن $\begin{cases} x = -19 \\ y = 10 \end{cases}$ $\boxed{E(-19 , 10)}$

5 – لدينا C مماثلة F بالنسبة لـ A

يعني أن A منتصف القطعة $[CF]$

أي أن $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AF}$

ليكن $F(x , y)$

لدينا $\overrightarrow{CA}(1 , -4)$ و $\overrightarrow{AF}(x - 5 , y + 2)$

بما أن $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AF}$ فإن

$\begin{cases} x - 5 = 1 \\ y + 2 = -4 \end{cases}$ أي أن $\begin{cases} x = 6 \\ y = -6 \end{cases}$

ومنه $\boxed{E(6 , -6)}$

تمرين 4 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر النقط $A(2 , 3)$ و$B(4 , 1)$ و $C(3 , 1)$

1 – حدد زوجي إحداثيتي النقطة D حيث :
$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

2– حدد زوج احداثيتي النقطة E بحيث :
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

الجواب :

1 – لدينا $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

إذن

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$

يعني أن $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AO}$

$= -2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

إذن $\overrightarrow{OD} = -2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$= -2(2\vec{i} + 3\vec{j}) + 2(4\vec{i} + \vec{j}) + 3\vec{i} + \vec{j}$

$= -4\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{i} + \vec{j}$

إذن $\overrightarrow{OD} = 7\vec{i} - 3\vec{j}$

$\boxed{D(7 , -3)}$

2 – لدينا

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$

ليكن $E(x , y)$

لدينا $\overrightarrow{AB}(2 , -2)$

و $\overrightarrow{CE}(x - 3 , y - 1)$

بما أن $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$ فإن

$\begin{cases} x - 3 = 2 \\ y - 1 = -2 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$

إذن $\boxed{E(5 , -1)}$

تمرين 5 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر النقط :

$A(1 , 3)$ و $B(-1 , -\frac{3}{2})$ و $C(3 , \frac{3}{2})$

$D(2 , -\frac{3}{4})$

$E(2 , m)$ حيث $m \in \mathbb{R}$

1 – ادرس استقامية النقط A و B و C



2 – هل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتان ؟

3 – حدد قيمة العدد الحقيقي m لكي تكون النقط B و C و E مستقيمية

4 – حدد احداثيتي النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

الجواب :

1 – لدينا $\overrightarrow{AC}(2\,,-\frac{3}{2})$ و $\overrightarrow{AB}(-2\,,-\frac{9}{2})$

$$\det(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}$$
$$= (-2)(-\frac{3}{2}) - 2\times(-\frac{9}{2})$$
$$= 3+9$$
$$\neq 0$$

إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيميتان وبالتالي النقط A و B و C غير مستقيمية

– 2

لدينا $\overrightarrow{AB}(-2\,,-\frac{9}{2})$ و $\overrightarrow{CD}(-1\,,-\frac{9}{4})$

$$\det(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{9}{2} & -\frac{9}{4} \end{vmatrix}$$
$$= (-2)(-\frac{9}{4}) - (-1)(-\frac{9}{2})$$
$$= \frac{9}{2} - \frac{9}{2}$$
$$= 0$$

إذن المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتين.

3 – لدينا $\overrightarrow{BE}(2\,,m+\frac{3}{2})$ و $\overrightarrow{CD}(4\,,3)$

B و C و E مستقيمية تعني أن $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BE}$ مستقيميتان أي أن :

$$\det(\overrightarrow{BE}\,,\overrightarrow{BC}) = 0$$

أي أن
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ m+\frac{3}{2} & 3 \end{vmatrix} = 0$$
$$4(m+\frac{3}{2}) - 3\times 3 = 0$$
$$4m+6-9=0$$
$$4m=3$$

إذن
$$\boxed{m=\frac{3}{4}}$$

4 - G مركز ثقل المثلث ABC تعني أن :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

أي :

$$\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

أي أن
$$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{OG}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$$
$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\vec{i}+3\vec{j}-\vec{i}-\frac{3}{2}\vec{j}+3\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(3\vec{i}+3\vec{j}\right)$$
$$=\vec{i}+\vec{j}$$

إذن
$$\overrightarrow{OG}=1.\vec{i}+1.\vec{j}$$

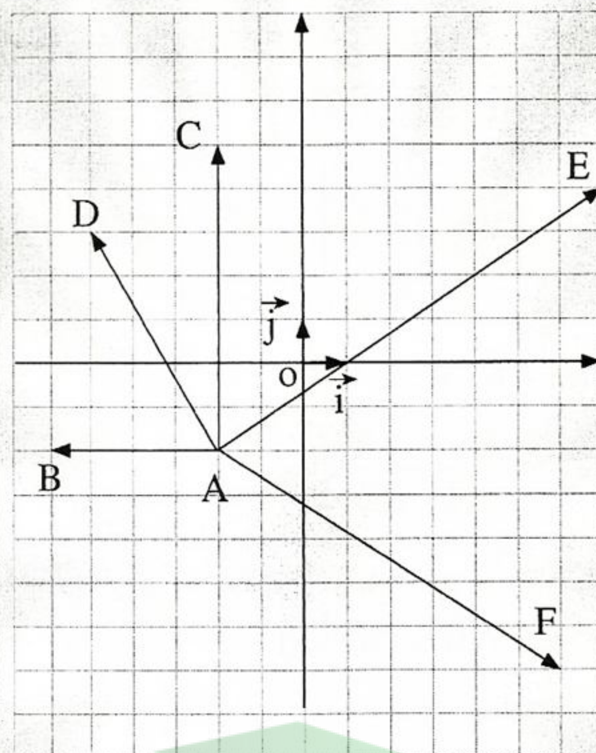
أي أن
$$\boxed{G(1\,,1)}$$

تمرين 6 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i}\,,\vec{j})$

نعتبر الشكل التالي :





إقرأ على الشكل احداثيات المتجهات التالية :

$\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AF}$

الجواب :

حسب الشكل لدينا :

$\overrightarrow{AB}(-4 , 0)$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}(0 , 7)$

$\overrightarrow{AD}(-3 , 5)$ $\quad$ $\overrightarrow{AE}(9 , 6)$

$\overrightarrow{AF}(9 , -4)$ $\quad$ $\overrightarrow{DC}(3 , 2)$

$\overrightarrow{EF}(0 , -10)$

تمرين 7 :

ABCD متوازي الأضلاع E و F نقطتان بحيث :

$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC}$

1 – لماذا $(A , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD})$ معلم ؟ (علل جوابك)

2 – في المعلم $(A , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD})$ حدد احداثيات النقط F , E , D , C , B , A

الجواب :

لدينا ABCD متوازي الأضلاع فعلي إذن النقط A و B و D غير مستقيمية

وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مستقيميان إذن المثلوث $(A , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD})$ معلم.

2 – بما أن A أصل المعلم $(A , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD})$ فإن $A(0 , 0)$

لدينا $\overrightarrow{AB} = 1.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AD}$

إذن $B(1 , 0)$

بما أن $\overrightarrow{AD} = 0\,\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AD}$

فإن $D(0 , 1)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AC} = 1.\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AD}$

ومنه $C(1 , 1)$

لدينا $\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB}$

$= 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$= 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC}$

$= -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

إذن $\overrightarrow{AE} = 0\,\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

أي أن $\boxed{E(0 , 2)}$

لدينا $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

إذن

$$\boxed{F\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}$$

تمرين 8 :

ABC مثلثا E و F نقطتين بحيث :

$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BE} = 3\,\overrightarrow{BC}$

نعتبر المستوى (P) منسوب إلى المعلم

$(\vec{A}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

1 – حدد احداثيات النقط

A, B, C, E, F

2 – بين أن النقط A و C و F مستقيمية

3 – حدد احداثيتي النقطة D مركز ثقل المثلث BEF

الجواب :

1 – لدينا $A(0, 0)$

لدينا $\overrightarrow{AB} = 1.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AC}$

إذن $B(1, 0)$

بما أن $\overrightarrow{AC} = 0\,\overrightarrow{AB} + 1\,\overrightarrow{AC}$

فإن $C(0, 1)$

لدينا $\overrightarrow{BE} = 3\,\overrightarrow{BC}$

أي أن $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = 3\,\overrightarrow{BA} + 3\,\overrightarrow{AC}$

يعني أن :

$\overrightarrow{AE} = 3\,\overrightarrow{BA} + 3\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AE} = -2\,\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

إذن $\boxed{E(-2, 3)}$

$\overrightarrow{EF} = 2\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = 2\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AF} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

$= 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

$= 3\overrightarrow{AC}$

إذن $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$

$\boxed{F(0, 3)}$

2 - لدينا

$F(0, 3)\quad C(0, 1)\quad A(0, 0)$

$\overrightarrow{AC}(0, 1)\qquad \overrightarrow{AF}(0, 3)$

$$\det(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 3 \times 0 = 0$$

إذن $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتان وبالتالي A و C و F نقط مستقيمية.

3 - D مركز ثقل المثلث BEF

تعني أن

$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

ومنه $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB}$

أي أن $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\left(-2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC}\right)$

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

إذن $D(-\frac{1}{3}, 2)$

تمرين 9 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقطتين $A(2,3)$ و $B(-1,1)$

1 – اعط معادلة ديكارتية للمستقيم (AB)

2 – هل النقطة $C(4,1)$ تنتمي إلى (AB) ؟

3 – حدد العدد الحقيقي m بحيث تكون النقطة $D(m,1)$ تنتمي إلى (AB)

الجواب :

1 – لدينا : $A(2,3)$ و $B(-1,1)$

إذن $\overrightarrow{AB}(-3,-2)$ متجهة موجهة لـ (AB)

$(AB): -2x + 3y + C = 0$

وبما أن $A(2,3) \in (AB)$

فإن $-2 \times 2 + 3 \times 3 + C = 0$

أي أن $C = -5$

ومنه $(AB): -2x + 3y - 5 = 0$

أي أن $\boxed{(AB): -2x + 3y - 5 = 0}$

2 - $C(4,1) \in (AB)$ تعني أن

$2 \times 4 - 3 \times 1 - 5 = 0$

أي أن $8 - 3 - 5 = 0$

$8 - 8 = 0$

$0 = 0$

إذن $C(4,1) \in (AB)$

3 - $D(m,1) \in (AB)$ تكافئ

$2 \times m - 3 \times 1 + 5 = 0$

أي أن $2m + 2 = 0$

ومنه $m = -1$

تمرين 10 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) في الحالات التالية :

1 - المستقيم (Δ) يمر من النقطة $A(-2,5)$ وموجه بالمتجهة $\vec{u}(-3,1)$

2 - المستقيم (Δ) يمر من النقطتين $E(-1,0)$ و $F(1,1)$

3 - المستقيم (Δ) يمر من النقطة $I(0,3)$ ومعامله الموجه $m = -2$

4 - المستقيم (Δ) يمر من النقطة $C(2,-1)$ وموازي للمستقيم (D) ذي المعادلة :

$2x - 7y + 1 = 0$

الجواب :

1 - $A(-2,5)$; $\vec{u}(-3,1)$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (\Delta)$ تعني أن $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان أي أن $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = 0$

أي أن $\begin{vmatrix} x+2 & -3 \\ y-5 & 1 \end{vmatrix} = 0$

أي أن $1(x+2) - (-3)(y-5) = 0$



$x + 2 + 3y - 15 = 0$

أي أن $(\Delta) : x + 3y - 13 = 0$

2 - $E(-1 , 0)$ و $F(1 , 1)$

لدينا $\overrightarrow{EF}(2 , 1)$ متجهة موجهة لـ (EF)

لدينا $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (EF)$ أي أن

$\det(\overrightarrow{EM} , \overrightarrow{EF}) = 0$

أي أن $\begin{vmatrix} x+2 & 2 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$

تكافئ $1(x + 1) - 2 \times y = 0$

$(EF) : x - 2y + 1 = 0$

3 - نعلم أن

$(\Delta) : y = mx + p$

بما أن $m = -2$ فإن :

$y = -2x + p$

لدينا $I(0 , 3) \in (\Delta)$ إذن

$3 = -2 \times 0 + p$

إذن $p = 3$

ومنه $(\Delta) : y = -2x + 3$

4 - بما أن (Δ) و (D) متوازيان فإن لهما نفس المتجهة الموجهة وبالتالي :

$(\Delta) : 2x - 7y + C = 0$

لدينا $C(2 , -1) \in (\Delta)$ إذن

$2 \times 2 - 7(-1) + C = 0$

$4 + 7 + C = 0$

$C = -11$

ومنه $(\Delta) : 2x - 7y - 11 = 0$

تمرين 11 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O, \vec{i} , \vec{j})$

حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) في الحالات التالية :

1 - المستقيم (D) يمر من النقطة $A(2 , -3)$ وموجه بالمتجهة $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

2 - المستقيم (D) يمر من النقطتين $B(4 , 3)$ و $C(2 , -1)$

3 - المستقيم (D) يمر من النقطة $D(2 , 2)$ والموازي للمستقيم (Δ) حيث : $(\Delta) : 2x + y - 3 = 0$

4 - المستقيم (D) يمر من النقطة $E(2 , 5)$ ومعامله الموجه هو $m = 4$

الجواب :

1 - $A(2 , -3)$; $\vec{u}(0 , 4)$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (D)$ تكافئ

$$\begin{cases} x = 2 + 0 \times t \\ y = -3 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

إذن $(D) \begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

2 - لدينا : $B(4 , 3)$ و $C(2 , -1)$

إذن $\overrightarrow{BC}(-2 , -4)$ متجهة موجهة لـ (D)

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (D)$ تعني أن

$$\begin{cases} x = 4 - 2\times t \\ y = 3 - 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(D) \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 3 - 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3 - لدينا $(\Delta) : 2x + y - 3 = 0$

إذن $\vec{u}(-1 , 2)$ متجهة موجهة لـ (Δ)

وبما أن $(D) // (\Delta)$ فإن $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ متجهة موجهة لـ (D)

ولدينا $D(2 , 2) \in (D)$ إذن

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (D)$ تعني أن

$$\begin{cases} x = 2 - 1\times t \\ y = 2 + 2\times t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(D) \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

4 - لدينا $m = 4$ معامل موجه لـ (D)

إذن $\vec{u}(1 , 4)$ متجهة موجهة لـ (D)

ولدينا $E(2 , 5) \in (D)$ إذن

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (D)$ تكافئ :

$$\begin{cases} x = 2 + 1\times t \\ y = 5 + 2\times t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

أي أن

$$(D) \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

تمرين 12 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i} , \vec{j})$

1 - اعط معادلة ديكارتية للمستقيم (D) المعرف بـ

$$(D) \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2 - اعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المعرف ب

$$(D) : 3x + 2y - 4 = 0$$

الجواب :

لدينا :

$$(D) \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

إذن $\vec{u}(1 , -5)$ متجهة موجهة لـ (D)

و $A\ (2 , 3)$ نقطة من المستقيم (D).

إذن $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (D)$ تكافئ

$$\det(\overrightarrow{AM} , \vec{u}) = 0$$

أي أن
$$\begin{vmatrix} x - 2 & 1 \\ y - 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

تكافئ $-5(x - 2) - 1(y - 3) = 0$

إذن $-5x + 10 - y + 3 = 0$

$(D) : -5x - y + 13 = 0$

إذن $(D) : 5x + y - 13 = 0$

2 - لدينا $(D) : 3x + 2y - 4 = 0$

إذن $\vec{u}(-2 , 3)$ متجهة موجهة لـ (D).

لدينا كذلك $B\ (0 , 2)$ نقطة من المستقيم (D)



إذن $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (D)$ تكافئ

$$\begin{cases} x = 0 - 2\times t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

أي أن

$$(D) : \begin{cases} x = -2t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

تمرين 13 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D) في الحالات التالية :

1 - المستقيم (D) يمر من النقطة $A(0,1)$ وعمودي على المستقيم (Δ)

حيث $(\Delta) : 2x + y + 4 = 0$

2 - المستقيم (D) عمودي على المستقيم (AB) حيث $A(-1,2)$ و $B(2,1)$ ويمر من $E(2,-3)$

3 - المستقيم (D) يمر من النقطة $C(4,3)$ وعمودي على المستقيم $(\Delta) : y = 2$

الجواب :

1 - لدينا $(\Delta) : 2x + y + 4 = 0$

ومنه $(\Delta) : \quad y = -2x - 4$

وبالتالي : $m = -2$ معاملا موجها لـ (Δ)

ليكن m' معاملا موجها لـ (D)

نعلم $(D) \perp (\Delta)$ إذن $m \times m' = -1$

أي أن $(-2)\times m' = -1$

$$m' = \frac{1}{2}$$

ومنه $(D) : \quad y = \frac{1}{2}x + p$

لدينا $A(0 , 1) \in (D)$ إذن :

$$1 = \frac{1}{2}\times 0 + p$$

إذن : $p = 1$

ومنه $\boxed{(D) : \quad y = \frac{1}{2}x + 1}$

$$(D) : x - 2y + 2 = 0$$

2 - لدينا $A(-1,2)$ و $B(2,1)$

إذن : $\overrightarrow{AB}(3 , -1)$ متجهة موجهة لـ (AB)

ومنه $m' = -\frac{1}{3}$ معاملا موجها لـ(AB)

ليكن m' معاملا موجها لـ (D)

إذن $m \times m' = -1$ لأن $(D) \perp (\Delta)$

ومنه $m' = 3$

وبالتالي : $y = 3x + p$

لدينا $E(2 , -3) \in (D)$ إذن :

$$-3 = 3\times 2 + p$$

إذن : $p = -9$

ومنه $\boxed{(D) : \; y = 3x - 9}$

إذن : $\boxed{(D) : \; 3x - y - 9 = 0}$

3 - لدينا $(\Delta) : \; y = 2$ إذن (Δ) يوازي محور الأفاصيل وبما أن $(D) \perp (\Delta)$ فإن (D) يوازي محور الأراتيب.

وبالتالي $(D) : \; x = k$

وبما أن (D) يمر من النقطة $C(4 , 3)$ فإن :

$$(D) : \; x = 4$$

إذن : $\boxed{(D) : \; x = 4}$



تمرين 14 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر مجموعة المستقيمات (Dm) المعرف بـ :

$(Dm) : (m+1).x + 2my + 1 - 3m = 0$

حيث $m \in \mathbb{R}$

1 - حدد العدد m لكي يمر المستقيم (Dm) من أصل المعلم O

2 - حدد m لكي يمر (Dm) من $A(2,-1)$

3 - حدد العدد m حتى يكون (Dm) موازيا لمحور الأفاصيل.

4 - حدد العدد m حتى يكون (Dm) موازيا لمحور الأراتيب.

5 - حدد العدد m لكي يكون (Dm) موازيا للمستقيم : $(\Delta) : 2x - 3y + 5 = 0$

6 - بين أن المستقيمات (Dm) تمر كلها من نقطة واحدة I وحددها.

الجواب :

1 - لدينا

$(Dm) : (m+1).x + 2my + 1 - 3m = 0$

$O(0,0) \in (Dm)$ تكافئ

$(m+1).0 + 2m \times 0 + 1 - 3m = 0$

أي أن $1 - 3m = 0$

$m = \frac{1}{3}$

ومنه

$\boxed{m = \frac{1}{3}}$

2 - لدينا

$(Dm) : (m+1).x + 2my + 1 - 3m = 0$

$A(2,-1) \in (Dm)$ تكافئ

$(m+1) \times 2 + 2m \times (-1) + 1 - 3m = 0$

أي أن $2m + 2 - 2m + 1 - 3m = 0$

أي أن $3 - 3m = 0$

$\boxed{m = 1}$

3 - (Dm) يوازي محور الأفاصيل

تكافئ : $m + 1 = 0$

$\boxed{m = -1}$

4 - (Dm) يوازي محور الأراتيب

تكافئ : $2m = 0$

$\boxed{m = 0}$

5 - لدينا $\vec{u}(3,2)$ متجهة موجهة لـ (Δ)

(Δ) $\overrightarrow{Um}(3,2)$ متجهة موجهة لـ (Dm)

$(\Delta)//(D)$ تكافئ :

$\det(\vec{U}, \overrightarrow{Um}) = 0$

أي أن $\begin{vmatrix} 3 & -2m \\ 2 & m+1 \end{vmatrix} = 0$

$3(m+1) - (-2m) \times 2 = 0$

$3m + 3 + 4 = 0$

$7m = -3$

إذن : $\boxed{m = -\frac{3}{7}}$

6 - لدينا

$(Dm) : (m+1).x + 2my + 1 - 3m = 0$

تكافئ : $mx + x + 2my + 1 - 3m = 0$



لكل m من $\mathbb{R}$

أي أن $(mx + 2my - 3m) + (x + 1) = 0$

لكل m من $\mathbb{R}$

ومنه $(x + 2y - 3)m + (x + 1) = 0$

لكل m من $\mathbb{R}$

ومنه $x + 1 = 0$ و $x + 2y - 3 = 0$

أي أن $x = -1$ و $-1 + 2y - 3 = 0$

إذن : $x = -1$ و $y = 2$

إذن المستقيمات (D_m) تمر كلها من نقطة واحدة I حيث : $I(-1 , 2)$

تمرين 15 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ليكن (D) المستقيم المعرف ب :

$$(D) : 3x - 2y + 5 = 0$$

1 - حدد تقاطع (D) مع المستقيمات التالية

أ – $(D_1) : x = 3$

ب – $(D_2) : y = -2$

ج – $(D_3) : x + y - 1 = 0$

د – $(D_4) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

2 - حدد تقاطع (D) مع محوري المعلم.

الجواب :

1 - أ – $(D) : 3x - 2y + 5 = 0$

$(D_1) : x = 3$

زوج احداثي نقطة تقاطع (D) و (D_1) يحقق النظمة التالية :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

إذن : $\begin{cases} x = 3 \\ 9 - 2y + 5 = 0 \end{cases}$

أي أن : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$

ومن (D) و(D_1) يتقاطعان في النقطة $I(3 , 7)$

ب – لدينا :

$(D) : 3x - 2y + 5 = 0$

$(D_2) : y = -2$

زوج احداثيتي نقطة تقاطع (D) و(D_2) يحقق النظمة التالية :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

أي أن $\begin{cases} y = -2 \\ 3x + 4 + 5 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

ومنه (D) و(D_2) يتقاطعان في النقطة :

$J(-3 , -2)$

ج – لدينا

$(D) : 3x - 2y + 5 = 0$

$(D_3) : x + y - 1 = 0$

لدينا $\vec{u}(2 , 3)$ متجهة موجهة لــ (D)

لدينا $v(-1 , 1)$ متجهة موجهة لــ (D_3)



$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2 + 3 = 5 \neq 0$$

إذن (D) و(D_3) يتقاطعان في النقطة H حيث زوج احداثيتي يحقق :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

أي أن
$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ 3x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

ومنه $3x - 2(-x + 1) + 5 = 0$

أي أن $3x + 2x - 2 + 5 = 0$

$$5x + 3 = 0$$
$$x = -\frac{3}{5}$$

ومنه $y = \frac{8}{5}$

إذن (D) و(D_3) يتقاطعان في النقطة :

$$H(-\frac{3}{5}, \frac{8}{5})$$

تمرين 16:

ABCD متوازي الأضلاع و E و F نقطتين من المستوى (P) حيث :

$\vec{BF} = \frac{3}{2}.\vec{BC}$ و $\vec{DE} = \frac{2}{3}.\vec{DC}$

نعتبر المعلم $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$

1 – اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (AE)

2 – حدد احداثيتي النقطة F

3 – استنتج أن النقط A و E و F مستقيمية.

الجواب :

1 – لدينا $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$ معلم.

$$\vec{DE} = \frac{2}{3}.\vec{DC}$$
$$\vec{DA} + \vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{DC}$$
$$\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{DC} + \vec{AD}$$
$$= \frac{2}{3}\vec{AB} + \vec{AD}$$

لأن ABCD متوازي الأضلاع

ومنه $E(\frac{2}{3}, 1)$

ولدينا $A(0, 0)$

إذن $\vec{AE}(\frac{2}{3}, 1)$ متجهة موجهة لـ (AE)

ومنه

$$(AE) : x - \frac{2}{3}y + c = 0$$

وبما أن $A(0, 0) \in (AE)$ فإن

$$(AE) : x - \frac{2}{3}y = 0$$

أي أن

$$\boxed{(AE) : 3x - 2y = 0}$$

2 – لدينا $\vec{BF} = \frac{3}{2}\vec{BC}$

أي أن $\vec{BA} + \vec{AF} = \frac{3}{2}\vec{BC}$

أي أن $\vec{AF} = \vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{BC}$

$$= \vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AD}$$

إذن $F(1, \frac{3}{2})$

3 – لدينا

$$(AE) : 3x - 2y = 0$$

و $F(1, \frac{3}{2})$

لدينا $F \in (AE)$ تكافئ



$$3 \times 1 - 2 \times \frac{3}{2} = 0$$
$$3 - 3 = 0$$
$$0 = 0$$

إذن $F \in (AE)$

أي أن النقط A و E و F مستقيمية.

تمرين 17 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 – نعتبر (D) و (Δ) المستقيمين المعرفين بما يلي :

$$(D)\begin{cases} x = mt \\ y = -1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

و

$$(\Delta) \quad mx + 4y - 3 = 0$$

حدد قيمة العدد الحقيقي m التي من أجلها يكون (D) و (Δ) متوازيين.

2 – نعتبر المستقيمين (D) و (D_α) المعرفين بما يلي :

$$(D_\alpha)\begin{cases} x = \alpha - t \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(D)\begin{cases} x = -2 + 2k \\ y = -2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

أ – بين أن $(D_\alpha) /\!/ (D)$

ب – حدد قيمة α لكي يكون $(D_\alpha) = (D)$

الجواب :

1 – $\vec{u}(m , -1)$ متجهة موجهة لـ (D)

و $\vec{v}(-4 , m)$ متجهة موجهة لـ (Δ)

$(\Delta)/\!/(D)$ تكافئ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان أي

أن $\det(\vec{u} , \vec{v}) = 0$

$$\begin{vmatrix} m & -4 \\ -1 & m \end{vmatrix} = 0$$

يعني $m^2 - 4 = 0$

أي $m^2 = 4$

ومنه $m = 2$ أو $m = -2$

2 –

أ – لدينا $\vec{u}(-1 , 1)$ متجهة موجهة لـ (D_α)

$\vec{v}(2 , -2)$ متجهة موجهة لـ (D)

وبما أن $\vec{v} = -2\vec{u}$

فإن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان وبالتالي $(D)/\!/(D_\alpha)$

ب – لدينا $A(-2 ,0) \in (D)$

لكي يكون $(D) = (D_\alpha)$ يجب أن تكون :

$$\begin{cases} -2 = \alpha - t \\ 0 = t \end{cases}$$

إذن $-2 = \alpha - 0$

$$\boxed{\alpha = -2}$$

تمرين 18 :

I) ABC مثلث و M نقطة من المستوى (P)

حيث : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

1 - بين أن المتجهتين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BM}$ مستقيميتان

2 - لتكن N النقطة بحيث :

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

بين أن النقط N وB و M مستقيمية



II) المستوى (P) منسوب إلى المعلم $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

1 – حدد احداثيات A ; B ; C ; M و N

2 – بين أن الرباعي ANMC متوازي أضلاع

3 – اعط معادلة ديكارتية لـ (BC) ثم تحقق من أن $S(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \in (BC)$

4 – بين أن المستقيم (SM) يوازي المستقيم (AB)

الجواب :

1 – لدينا $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

إذن $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

ومنه $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

أي أن $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

إذن $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BM}$ مستقيميتان

2 – لدينا $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

ومنه $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

أي أن $\overrightarrow{BN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

إذن $\overrightarrow{BN} = -3 \times \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{BN} = -3 \times \overrightarrow{BM}$

$\overrightarrow{BN} = -3\overrightarrow{BM}$

إذن النقط B و N و M مستقيمية

II) لدينا $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ معلم

1 – $A(0, 0)$ و $B(1, 0)$ و $B(0, 1)$

وبما أن $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

فإن $M(1, \frac{1}{4})$

وبما أن $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

فإن $N(1, -\frac{3}{4})$

2 – لدينا $\overrightarrow{AC}(0, 1)$

و $\overrightarrow{NM}(0, 1)$

ومنه الرباعي ANMC متوازي الأضلاع.

3 – لدينا $B(1, 0)$ $\overrightarrow{BC}(-1, 1)$

إذن $(BC)\ x + y - c = 0$

$B(1, 0) \in (BC)$ تكافئ

$1 + 0 + c = 0$

$c = -1$

إذن $\boxed{(BC) : x + y - 1 = 0}$

$S(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$

$S(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \in (BC)$ تكافئ $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 1 = 0$

$1 - 1 = 0$

$0 = 0$

إذن $S(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \in (BC)$

4 – لدينا

$\overrightarrow{AB}(1, 0)$ و $\overrightarrow{SM}(\frac{1}{4}, 0)$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SM}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{SM}$ مستقيميتان ومنه :

ومنه $(SM) /\!/ (AB)$



تمرين 19 :

ABCD متوازي الأضلاع E و F نقطتان من (P) حيث

$\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ و $3\overrightarrow{FD}-5\overrightarrow{FC}=\vec{0}$

1 – انشئ الشكل

2 – المستوى (P) منسوب إلى المعلم $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

أ – حدد احداثيات النقط C و E و F

ب – حدد احداثيتي النقطة I مركز المتوازي الأضلاع ABCD

ج – بين أن : $2x-9y+4=0$ معادلة ديكارتية للمستقيم (EF)

3 – أ – اكتب معادلة ديكارتية لـ (AC)

ب – ادرس وحدد تقاطع المستقيمين (AC) و (EF)

الجواب :

1 – الانشاء :

لدينا $\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

أي أن $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}$

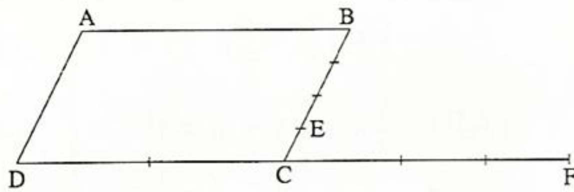
$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

$3\overrightarrow{FD}-5\overrightarrow{FC}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{FC}+3\overrightarrow{CD}-5\overrightarrow{FC}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{FC}=3\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$



2 – لدينا ABCD متوازي الأضلاع

إذن $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

إذن $C(1,1)$

$\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

$3\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$

$=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

إذن $E(1,\frac{2}{3})$

لدينا

$3\overrightarrow{FD}-5\overrightarrow{FC}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{FA}+3\overrightarrow{AD}-5\overrightarrow{FA}-5\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{AF}=-3\overrightarrow{AD}+5\overrightarrow{AC}$

$=-3\overrightarrow{AD}+5\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AF}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AD}$

$F(\frac{5}{2},1)$

ب – I مركز ABCD إذن I منتصف [AC]

لدينا $A(0,0)$ و $C(1,1)$

إذن $C(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

ج – لدينا : $E(1,\frac{2}{3})$ و $F(\frac{5}{2},1)$

لدينا : $\overrightarrow{EF}(\frac{3}{2}, \frac{1}{3})$

لدينا $(AE) : \frac{1}{3}x - \frac{3}{2}y + c = 0$

تكافئ $E(1, \frac{2}{3}) \in (EF)$

$$\frac{1}{3}x - \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} + c = 0$$

$$c = \frac{2}{3}$$

$$(EF) : \frac{1}{3}x - \frac{3}{2}y + \frac{2}{3} = 0$$

$$(EF) : 2x - 9y + 4 = 0$$

3 – أ – لدينا $\overrightarrow{AC}(1, 1)$

$$(AC) : ax - by + c = 0$$

$$(AC) : x - y + c = 0$$

تكافئ $A(0 , 0) \in (BC)$

$$C = 0$$

إذن $(AC) : x - y = 0$

ب – لدينا : $(AC) : x - y = 0$

$$(EF) : 2x - 9y + 4 = 0$$

لدينا

$$\det(\overrightarrow{AC} , \overrightarrow{EF}) = \begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 + 9 = 7 \neq 0$$

إذن (AC) و (EF) متقاطعان زوج احداثيتي نقطة تقاطع (AC) و (EF) يحقق النظمة التالية

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 9y + 4 = 0 \end{cases}$$

أي أن

$$\begin{cases} x - y \\ 2x - 9y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$2x - 9x + 4 = 0$$

$$-7x + 4 = 0$$

$$x = \frac{4}{7}$$

ومنه

$$y = \frac{4}{7}$$

$$(EF) \cap (AC) = \left\{J\left(\frac{4}{7} , -\frac{4}{7}\right)\right\}$$

تمرين 20 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O, \vec{i} , \vec{j})$

نعتبر : $A(2 , -1)$ $B(1, 2)$ $C(-2 , 1)$

1 – اكتب معادلات متواسطات المثلث ABC

2 – بين تحليليا أن هذه المتوسطات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة G يتم تحديد احداثيتها.

الجواب :

1 – ليكن I منتصف القطعة [AB]

$$I(\frac{3}{2} , \frac{1}{2})$$

المتوسط (IC)

لدينا $\overrightarrow{IC}(\frac{3}{2} , \frac{1}{2})$

إذن $(IC) : \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}y + C = 0$

تكافئ $C(-2 , 1) \in (IC)$

$$(IC) : 1 + \frac{7}{2} + C = 0$$

$$C = -\frac{5}{2}$$

$$(IC) : \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}y - \frac{5}{2} = 0$$

أي أن

$$(IC) : x + 7y - 5 = 0$$

ليكن J منتصف القطعة [AC]

$J(0\ ,\ 0)$

المتوسط (JB)

لدينا $\overrightarrow{JB}\ (1\ ,\ 2)$

إذن $(BJ) : 2x - y + C = 0$

لدينا $J(0\ ,\ 0) \in (BJ)$ إذن

$2 \times 0 - 0 + C = 0$

$C = 0$

أي أن $(BJ)\ :\ 2x - y = 0$

ليكن K منتصف القطعة [BC]

$K(-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{3}{2})$

المتوسط (AK)

لدينا $\overrightarrow{AK}\ (-\frac{5}{2}\ ,\ \frac{5}{2})$

إذن $(BJ) :\ \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}y + C = 0$

لدينا $A(2\ ,\ -1) \in (AK)$ تكافئ :

$\frac{10}{2} - \frac{5}{2} + C = 0$

$C = -\frac{5}{2}$

أي أن $(AK)\ :\ x + y - 1 = 0$

2 – زوج احداثيي النظمة G يحقق النظمة

$$\begin{cases} x + 7y - 5 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

لنحدد احداثيات النقطة G

لدينا
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

إذن
$$\begin{cases} y = 2x \\ 3x - 1 = 0 \end{cases}$$
أي أن

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$
إذن $G(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3})$

لنتأكد من أن G تنتمي إلى (IC)

لدينا $(IC)\ :\ x + 7y - 5 = 0$

$G(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3}) \in (IC)$ تكافئ :

$\frac{1}{3} + \frac{14}{3} - 5 = 0$

$\frac{15}{3} - 5 = 0$

$5 - 5 = 0$

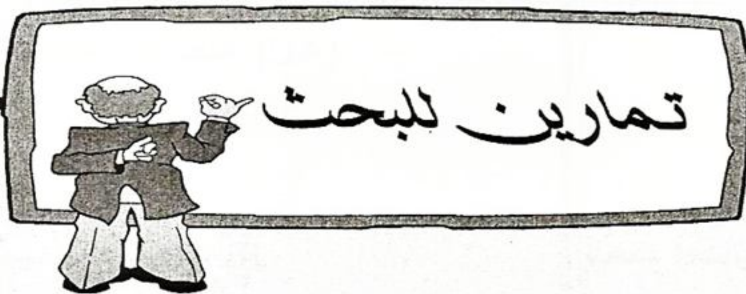
$0 = 0$

إذن $G \in (IC)$

ومنه G هي نقطة تقاطع المتوسطات (IC) و

(JB) و (AK)





تمرين 1 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط $A(3,0)$ و $B(1,2)$ و $C(-1,3)$

حدد احداثيتي كل من النقط E و F و G حيث :

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OF} = -2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OG} = 4\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC}$$

تمرين 2 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط $A(3,-2)$ و $B(4,3)$ و $C(1,0)$

حدد احداثيتي النقطة M في الحالات التالية :

أ – $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

ب – $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

ج – ABCM متوازي الأضلاع.

تمرين 3 :

ABCD متوازي الأضلاع

و P و Q نقطتين بحيث :

$$\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

1 - بين أن النقط A و C و Q مستقيمية

2 – المستوى (P) منسوب إلى معلم $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

أ – حدد احداثيتي كل من النقطتين C و Q



ب – بين أن A و C و Q مستقيمية

تمرين 4 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

حدد معادلة ديكارتية وتمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) في الحالات التالية :

1 – (D) يمر من $A(2,4)$ وموجه ب $\vec{u}(3,1)$

2 – (D) يمر من النقطتين $A(2,1)$ و $B(0,3)$

3 – (D) يمر من $A(3,-4)$ و $m=3$

4 – (D) يمر من $A(1,-1)$ ويوازي $(\Delta): 3x-7y+1=0$

تمرين 5 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر المستقيم (Dm) المعرف بـ : $(m-1)x+my-m+2=0$

1 – بين أن (Dm) يمر من $A(2,1)$ لكل m من $\mathbb{R}$

2 – ماهي قيمة m التي من أجلها يكون (Dm)

أ – يمر من أصل المعلم

ب – يوازي محور الأفاصيل

ج – يوازي محور الأراتيب

د – يوازي المستقيم $(\Delta): 2x-3y+3=0$

تمرين 6 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ولتكن النقط.

$A(5,0)$ و $B(0,4)$ و $M(0,3)$ و $N(-2,0)$

1 – حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (AB)

2 – حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (MN)

3 – ادرس وحدد تقاطع المستقيمين (AB) و (MN).



تمرين 7 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

بين أن (Δ) و (D) متقاطعين وحدد نقطة تقاطعهما في الحالات التالية :

$(\Delta) : 2x + 3y - 1 = 0$ و $(D) : y = -2x + 1$

$(\Delta) : x + y = 0$ و $(D) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$(\Delta) : \begin{cases} x = 5\alpha \\ y = 2 - \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$(D) : \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

تمرين 8 :

ABC مثلثا في المستوى (P). I و J و K نقط محددة بـ :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{BK} = -2\overrightarrow{BC}$

1 – أنشئ الشكل

2 – بين أن :

$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{8}{3}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

ب – استنتج أن النقط I و J و k مستقيمية

3 – ننسب المستوى (P) إلى المعلم $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

أ – حدد احداثيات النقط I و J و k

ب – اكتب تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من C والموازي لمحور الأفاصيل.

ج – اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (IJ)

د – حدد تقاطع المستقيمين (D) و (IJ)



التحويلات الإعتيادية

- عدد الصفحات : [24]
- عدد التمارين المحلولة : [29]
- عدد تمارين البحث : [09]

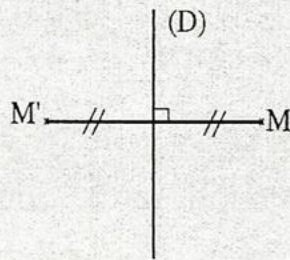




8 التحولات الاعتيادية

1 ـ التماثل المحوري :

تعريف : ليكن (D) مستقيم من المستوى (P) التماثل المحوري الذي محوره (D) هو التطبيق $S_{(D)}$ من (P) نحو (P) المعرف ب :



– إذا كان $M \in (D)$ فإن $S_{(D)}(M) = M$

– إذا كان $M \notin (D)$ فإن $S_{(D)}(M) = M'$

حيث (D) واسط القطعة [MM'].

خاصيات :

1 - التماثل المحوري يحافظ على المسافة.

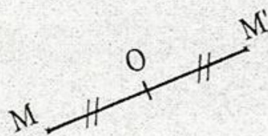
2 - التماثل المحوري يحافظ على الاستقامة ومعاملها.

أي إذا كان $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC}$ فإن $\overrightarrow{A'C'} = \alpha \overrightarrow{A'B'}$ حيث $S_{(D)}(A) = A'$ و $S_{(D)}(B) = B'$ و $S_{(D)}(C) = C'$

3 - مجموعة النقط الصامدة بالتماثل المحوري $S_{(D)}$ هي المستقيم (D).

2 ـ التماثل المركزي :

تعريف : التماثل المركزي الذي مركزه O حيث $O \in (P)$ هو تطبيق من (P) نحو (P) المعرف ب :



– $S_O(M) = M$ إذا كان $O = M$.

– $S_O(M) = M'$ إذا كان $O \neq M$ حيث O منتصف [MM'].

* ملاحظة : نفس الخاصيات السابقة تبقى صالحة بالنسبة للتماثل المركزي.

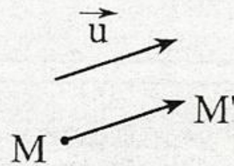
– التماثل المركزي له نقط صامدة وحيدة هي مركزه.

3 ـ الإزاحة :

تعريف : لتكن $\vec{u}$ متجهة. الإزاحة التي متجهتها $\vec{u}$ هي التطبيق $t_{\vec{u}}$ من (P) نحو (P) المعرف ب : $t_{\vec{u}}(M) = M'$ يعني $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



خاصيات :



1 - الخاصية المميزة للإزاحة :

- التطبيق f المعرف من (P) نحو (P) يكون إزاحة.

إذا وفقط إذا كان يحول كل نقطتانية (M,N) إلى نقطتانية (M',N') بحيث $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

هذه الخاصية تسمى الخاصية المميزة للإزاحة.

2 - إذا كانت $\vec{u} = \vec{0}$ فإن جميع نقط المستوى (P) صامدة بالإزاحة $t_{\vec{u}}$.

- إذا كانت $\vec{u} \neq \vec{0}$ فإن الإزاحة $t_{\vec{u}}$ لا تقبل نقطة صامدة.

4 - التحاكي :

تعريف : لتكن I نقطة من المستوى (P) و k عدد غير منعدم التحاكي الذي نسبته k ومركزه I هو التطبيق h(I,k) المعرف من (P) نحو (P) بحيث $h_{(I,k)}(M) = M'$ يعني $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$

خاصيات :

1 - إذا كان $k \neq 1$ فإن التحاكي يقبل نقطة صامدة وحيدة هي مركزه.

إذا كان $k = 1$ فإن $h_{(I,k)}(M) = M$ لكل $M \in (P)$.

2 - التحاكي لا يحافظ على المسافة إلا إذا كان $k = 1$ أو $k = -1$.

M'
M
r

3 - الخاصية المميزة للتحاكي :

f تحاك نسبته k حيث $k \neq 1$ إذا وفقط إذا كان يحول كل نقطتانية (M,N) إلى نقطتانية (M'N') بحيث $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

5 - خاصيات مشتركة :

1 - صورة مستقيم (D) هي مستقيم (D') يوازيه (بإزاحة أو بتماثل مركزي أو بتحاك).

2 - التماثل المركزي – التماثل المحوري والإزاحة كلها تحافظ على المسافة أي إذا كان A' و B' صورتي A و B فإن $A'B' = AB$.

أما بالنسبة للتحاكي فإن $A'B = |k|\,AB$ حيث نسبة التحاكي.

3 - صورة دائرة $(\mathscr{E})$ هي دائرة $(\mathscr{E}')$ مركز $(\mathscr{E}')$ هو صورة مركز $(\mathscr{E})$ وشعاع $(\mathscr{E}')$ هو شعاع $(\mathscr{E})$ إلا إذا كان التطبيق تحاكي فإن شعاع $(\mathscr{E}')$ هو $r' = |k|\,r$ حيث r شعاع $(\mathscr{E})$ و k نسبة التحاكي h.

4 - صورة زاوية $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ هي زاوية $(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}})$ حيث $(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\ [2\pi]$ مع



'A و 'B و 'C هي صور A , B , C على التوالي.

5 - التطبيقات السابقة تحافظ على الاستقامية ومعاملها وعلى المنتصف وعلى صور الأشكال ...

تمارين وحلولها

تمرين 1 :

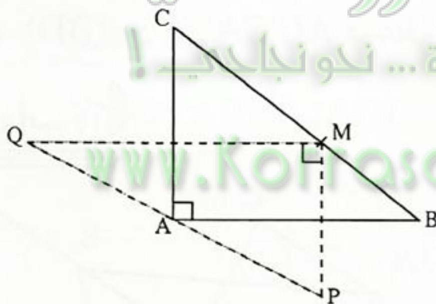
ABC مثلث قائم الزاوية في A.

M نقطة تنتمي إلى القطعة [BC]. النقطة P مماثلة النقطة M بالنسبة للمستقيم (AB) و Q مماثلة M بالنسبة للمستقيم (AC).

1) - بين أن النقط A و P و Q مستقيمية (باستعمال التماثل المحوري).

2) - باستعمال التماثل المحوري بين أن A منتصف [PQ].

الجواب :



1) - لدينا : $S_{(AB)}(M) = P$

$S_{(AB)}(A) = A$

$S_{(AB)}(B) = B$

إذن صورة الزاوية $B\hat{A}M$ بـ $S_{(AB)}$ هي الزاوية $B\hat{A}P$.

ومنه $B\hat{A}M = B\hat{A}P$

لدينا كذلك : $S_{(AC)}(A) = A$ و $S_{(AC)}(C) = C$ و $S_{(AC)}(M) = Q$

إذن صورة الزاوية $C\hat{A}M$ ب $S_{(AC)}$ هي الزاوية $C\hat{A}Q$.

ومنه : $C\hat{A}M = C\hat{A}Q$

وبما أن $B\hat{A}M + C\hat{A}M = 90°$ فإن : $B\hat{A}P + C\hat{A}Q = 90°$

لدينا : $Q\hat{A}P = Q\hat{A}C + C\hat{A}B + B\hat{A}P$

$= Q\hat{A}C + B\hat{A}P + C\hat{A}B$

$= 90° + 90°$

$= 180°$

إذن النقط A و Q و P مستقيمية.

2) - لدينا $S_{(AB)}(M) = P$ و $S_{(AB)}(A) = A$

إذن : $AM = AP$ ①

لدينا كذلك : $S_{(AC)}(M) = Q$

و $S_{(AC)}(A) = A$

إذن : $AM = AQ$ ②

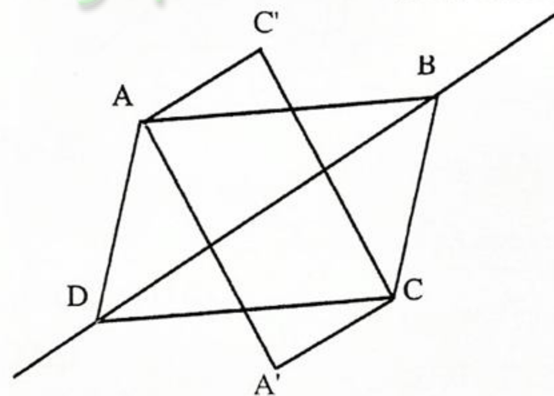
من ① و ② نستنتج أن $AP = AQ$

وبما أن A و P و Q مستقيمية فإن A منتصف [PQ].

تمرين 2 :

ليكن ABCD متوازي الأضلاع 'A و 'B على التوالي صورتا A و C بالثماثل المحوري الذي محوره (BD) بين أن 'AC'CA مستطيل.

الجواب :



لدينا ABCD متوازي الأضلاع ليكن I منتصف القطرين [AC] و [BD].

لدينا $S_{(BD)}(A) = A'$ و $S_{(BD)}(C) = C'$

و $S_{(BD)}(I) = I$ لأن $I \in (BD)$.

وبما أن التماثل المحوري يحافظ على المنتصف وبما أن I منتصف [AC] فإن I منتصف [A'C'] إذن [AC] و [A'C'] لهما نفس المنتصف I ومنه AC'CA' متوازي الأضلاع. (1)

لدينا : $S_{(BD)}(A') = A$ و $S_{(BD)}(C) = C'$

إذن صورة المستقيم (A'C) بالثماثل المحوري $S_{(BD)}$ هي المستقيم (AC').

وبما أن $(A'C) /\!/ (AC')$ فإن

$(BD) /\!/ (AC') /\!/ (A'C)$ وبما أن

$(BD) \perp (CC')$ و فإن $(AC') \perp (CC')$ (2)

من (1) و (2) فإن 'AC'CA مستطيل.

تمرين 3 :

ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A.

ننشئ خارج هذا المثلث : المثلثين المتساوي الأضلاع AB'C و AC'B.

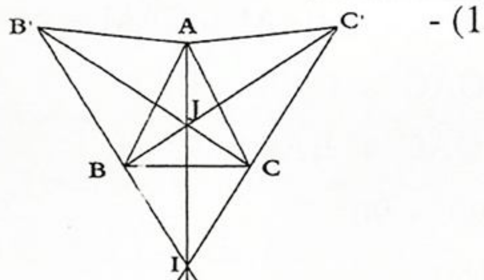
(BB') و (CC') يتقاطعان في I و (B'C) و (BC') يتقاطعان في J.

1) – أنشئ الشكل.

2) – باستعمال تماثل محوري، بين أن I و J و A مستقيمية.

الجواب :

1) -





2) - بما أن ABC مثلث متساوي الساقين في A فإن (Δ) واسط القطعة [BC] هو محور تماثل له.

لدينا $S_{(\Delta)}(B) = C$ و $S_{(\Delta)}(B') = C'$ لأن ABB' و ACC' مثماثلان بالنسبة لـ (Δ).

وبما أن $(B'B) \cap (CC') = \{I\}$ فإن :

$I \in (\Delta)$

لدينا كذلك $S_{(\Delta)}(C) = B$ و $S_{(\Delta)}(B') = C'$

إذن (CB') و (BC') متماثلان بالنسبة لـ (Δ)

وبما أن $(BC') \cap (B'C) = \{J\}$ فإن $J \in (\Delta)$

ولدينا $(\Delta) \ni A$ إذن النقط A و I و J مستقيمية.

تمرين 4 :

1) - ABC مثلث متساوي الساقين في A و I منتصف [AB] و J منتصف [AC].

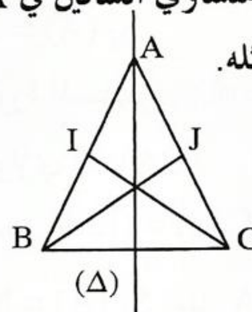
باستعمال تماثل محوري : بين أن : $BJ = CI$

2) - ABCD معين و M نقطة تنتمي إلى [BC] H و K هما على التوالي مسقطي M على المستقيمين (AB) و (AD) باستعمال تماثل محوري بين أن : $MH = Mk$

الجواب :

1) - ABC مثلث متساوي الساقين في A .

* نعتبر (Δ) محور تماثله.



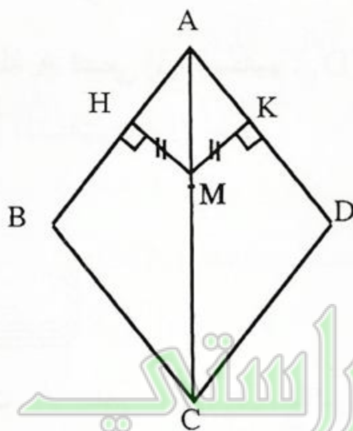
لدينا $S_{(\Delta)}(A) = A$ و $S_{(\Delta)}(B) = C$

إذن صورة القطعة [AB] بـ $S_{(\Delta)}$ هي القطعة [AC] وبما أن I منتصف [AB] و $S_{(\Delta)}$ يحافظ على المنتصف فإن $S_{(\Delta)}(I) = J$

ولدينا $S_{(\Delta)}(B) = C$ أي أن $S_{(\Delta)}(C) = B$

إذن $CI = BJ$ لأن التماثل المحوري يحافظ على المسافة.

2) -



(AC) محور تماثل لـ ABCD إذن

$S_{(BD)}((AB)) = (AD)$

نضع : $S_{(AC)}(H) = H'$

إذن $H' \in (AD)$ ①

ولدينا : $S_{(AC)}(M) = M$

و $S_{(AC)}(A) = A$ و $S_{(AC)}(H) = H'$

إذن صورة الزاوية $A\hat{H}M$ بـ $S_{(AC)}$ هي الزاوية $A\hat{H'}M$.

إذن $A\hat{H'}M = 90°$ ②

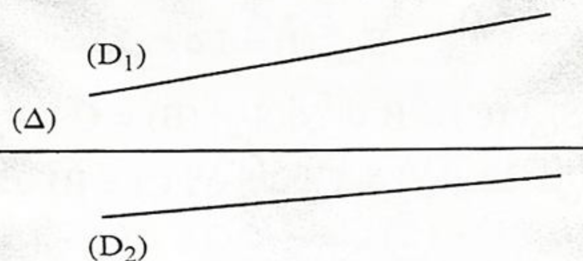
من ① و ② نستنتج أن $H' = K$ إذن

$S_{(AC)}(H) = K$ و $S_{(AC)}(M) = M$

إذن $MH = MK$ لأن التماثل المحوري يحافظ على المسافة.

تمرين 5:

نعتبر الشكل التالي :



أوجد نقطة A تنتمي إلى المستقيم (D_1) ونقطة B تنتمي إلى المستقيم (D_2) حيث :

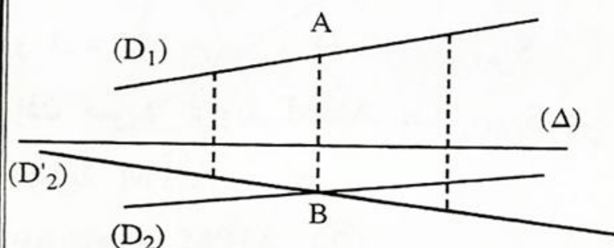
$B = S_{(\Delta)}(A)$

الجواب :

إذا كانت A تنتمي إلى (D_1) فإن $S_{(\Delta)}(A)$ تنتمي إلى (D'_1) المستقيم حيث :

$S_{(\Delta)}\left((D_1)\right) = (D'_1)$ إي أن $B \in (D'_1)$ إذن B هي نقطة تقاطع (D'_1) و (D_2).

الإنشاء :



ننشئ (D'_1) مماثل (D_1) بالنسبة لـ (Δ) ثم نحصل على النقطة B نقطة تقاطع (D'_1) و (D_2) ومن ثم ننشئ العمودي على (Δ) والمار من B ، هذا المستقيم الأخير يقطع (D_1) في A.

تمرين 6:

A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمية و M نقطة من (BC) مخالفة ل B و C . (Δ) هو المستقيم الذي يمر من A ويوازي (BC).

المستقيم الموازي لـ (AB) و المار من M يقطع (Δ) في D والمستقيم الموازي لـ (AC) والمار من M يقطع (Δ) في E.

1) - أنشئ الشكل .

2) - لتكن I منتصف القطعة [AM].

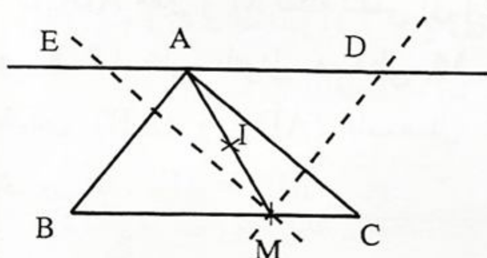
أ – حدد صورة المستقيمن (CA) و (CM) بـ S_I.

ب – استنتج صورة النقطة C بـ S_I.

3) - بين أن : $S_I(B) = D$ واستنتج أن $(CD) /\!/ (BE)$.

الجواب :

1) -



2) - أ – لدينا I منتصف [AM].

إذن $S_I(A) = M$

إذن صورة المستقيم (CA) هو المستقيم المار من M والموازي لـ (CA).

إذن لدينا $S_I\left((CA)\right) = (EM)$

لدينا $S_I(A) = M$ إذن $S_I(M) = A$

إذن صورة المستقيم (CM) بـ S_I هو المستقيم المار من A والموازي لـ (CM)

أي أن $S_I((CM)) = (\Delta)$

ب – لدينا : $(CM) \cap (CA) = \{C\}$

و (EM) و (Δ) صورتي (CA) و (CM) على التوالي بـ S_I.

إذن صورة C بـ S_I هي نقطة تقاطع (Δ) و (EM) أي أن : $S_I(C) = E$

3) – بنفس الطريقة نبين أن :

$S_I((BM)) = (\Delta)$ و $S_I(AB) = (MD)$

ولدينا $(BM) \cap (AB) = \{B\}$

إذن صورة B بـ S_I هي نقطة تقاطع المستقيمين (MD)و (Δ) أي أن : $S_I(B) = D$

لدينا $S_I(C) = E$ إذن $S_I(E) = C$

ولدينا $S_I(B) = D$

إذن $S_I((BE)) = (CD)$

وبالتالي : $(BE) \parallel (CD)$

تمرين 7:

ABCD متوازي الأضلاع مركزه O.

M و N نقطتان على (AB) و (CD) بحيث :

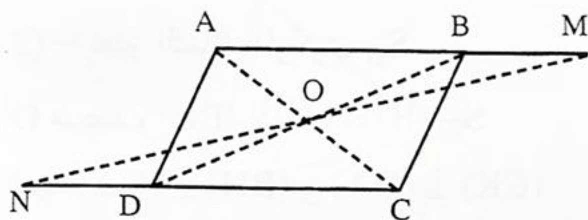
$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CD}$

1) – أنشئ الشكل.

2) – بين أن : $S_O(M) = N$

الجواب :

(1



2) – لدينا $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CD}$

إذن $\overrightarrow{NC} = k\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

وبما أن ABCD متوازي الأضلاع فإن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

وبالتالي : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$

إذن الرباعي AMCN متوازي الأضلاع ومنه للقطعتين [AC] و [NM] نفس المنتصف O.

إذن O منتصف القطعة [MN] أي أن :

$S_O(M) = N$

تمرين 8:

ABC مثلثا وO منتصف القطعة [BC].

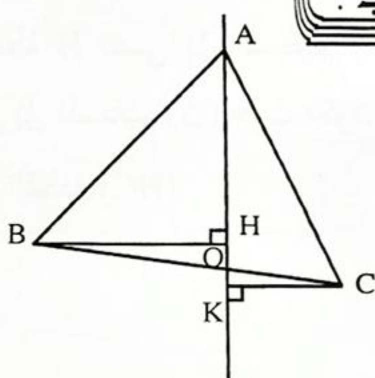
H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (AO) و K المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AO).

1) – أنشئ الشكل.

2) – بين أن الرباعي BHCK متوازي الأضلاع.

الجواب :

– (1





2) – نعتبر التماثل المركزي S_O

O منتصف [BC] إذن $S_O(B) = C$

لدينا $(BH) \perp (OA)$ و $(CK) \perp (OA)$

إذن $(BH) /\!/ (CK)$

وبما أن $S_O(B) = C$ فإن صورة المستقيم (BH) بالتماثل المركزي S_O هو المستقيم المار من C والموازي لـ (BH) أي أن :

$$S_O((BH)) = (CK)$$

ولدينا : $S_O(OA) = (OA)$ وبما أن :

$$(BH) \cap (OA) = \{H\}$$

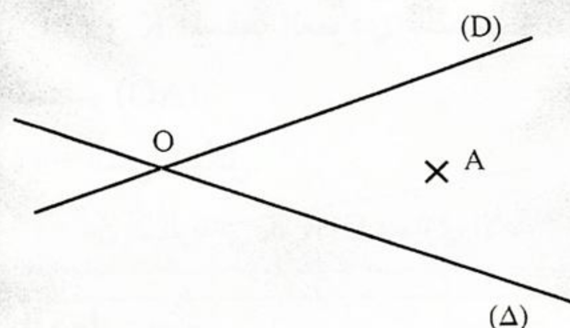
و $(OA) \cap (CK) = \{K\}$

فإن $S_O(H) = K$ إذن O منتصف (HK)

وبالتالي الرباعي BHCK متوازي الأضلاع.

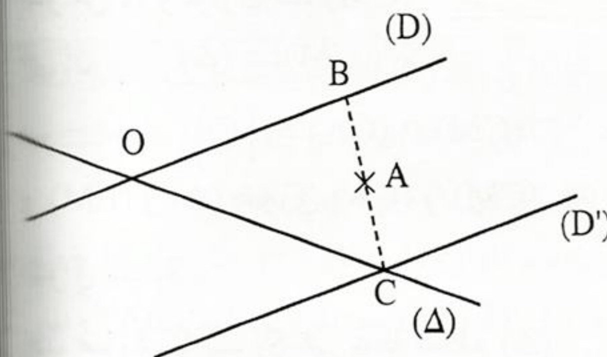
تمرين 9:

نعتبر الشكل التالي :



أنشئ نقطة B تنتمي إلى المستقيم (D) ونقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) حيث تكون النقطة A منتصف القطعة [BC].

الجواب :



* ننشئ (D') صورة (D) بالتماثل S_A.

أي أن : $S_A((D)) = (D'))$

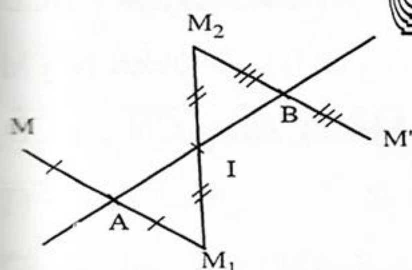
(D') يقطع (Δ) في نقطة C و (AC) يقطع المستقيم (D) في النقطة B. وهكذا نحصل على النقطتين B و C حيث A منتصف القطعة [BC].

تمرين 10:

A و B نقطتين مختلفتين و I منتصف القطعة [AB] نعتبر التماثلات المركزية S_A و S_B و S_I التي مراكزها A و B و I على التوالي.

أثبت أن : $S_B \circ S_I \circ S_A = S_A$.

الجواب :



لتكن M نقطة من المستوى (P).

M_1 صورة M بالتماثل S_A و M_2 صورة M_1 بـ S_I و M' صورة M_2 بـ S_B.

أي $S_A(M) = M_1$ و $S_I(M_1) = M_2$

و $S_B(M_2) = M'$

إذن $S_B \circ S_I \circ S_A(M) = M'$

لدينا $S_A(M) = M_1$ إذن $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM_1}$ (1)

لدينا $S_B(M_2) = M'$ إذن $\overrightarrow{M_2B} = \overrightarrow{BM'}$ (2)

كذلك $S_A(M_1) = M_2$ يعني أن I منتصف $[M_1M_2]$ ولدينا I منتصف $[AB]$.

إذن قطرا الرباعي AM_1BM_2 لهما نفس المنتصف I ومنه AM_1BM_2 متوازي الأضلاع وبالتالي $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{M_2B}$ (3) من العلاقات (1) و (2) و (3) فإن : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM'}$

أي أن $MAM'B$ متوازي الأضلاع وبالتالي فإن قطراه لهما نفس المنتصف وحيث I منتصف $[AB]$ فإن I منتصف $[MM']$ وهذا يعني أن $S_I(M) = M'$ وحيث أن

$S_B \circ S_I \circ S_A(M) = M'$ لكل $M \in (P)$

فإن : $S_B \circ S_I \circ S_A = S_I$

تمرين 11:

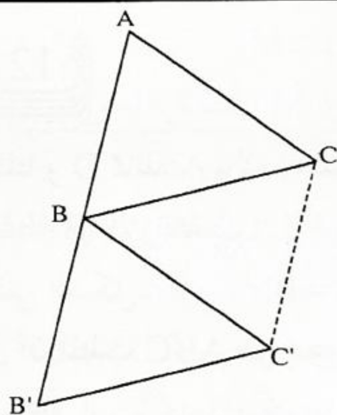
ABC مثلث أنشئ صور هذا المثلث بالإزاحات $t_{\overrightarrow{AB}}$ و $t_{\overrightarrow{BC}}$ و $t_{\overrightarrow{CA}}$.

الجواب :

لدينا $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$

$t_{\overrightarrow{AB}}(B) = B'$ يعني $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB}$

$t_{\overrightarrow{AB}}(C) = C'$ يعني $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$

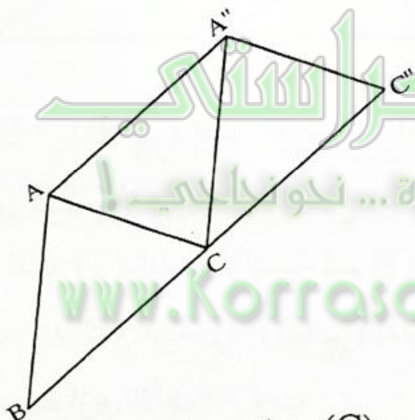


صور المثلث ABC بالإزاحة $t_{\overrightarrow{AB}}$ هي المثلث BB'C'.

لدينا $t_{\overrightarrow{BC}}(B) = C$

$t_{\overrightarrow{BC}}(A) = A''$ يعني $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BC}$

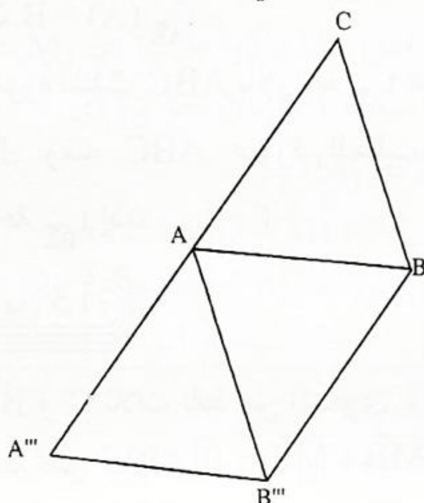
$t_{\overrightarrow{BC}}(C) = C''$ يعني $\overrightarrow{CC''} = \overrightarrow{BC}$



لدينا $t_{\overrightarrow{BC}}(C) = A$

$t_{\overrightarrow{CA}}(A) = A'''$ يعني $\overrightarrow{AA'''} = \overrightarrow{CA}$

$t_{\overrightarrow{CA}}(B) = B'''$ يعني $\overrightarrow{BB'''} = \overrightarrow{CA}$





تمرين 12:

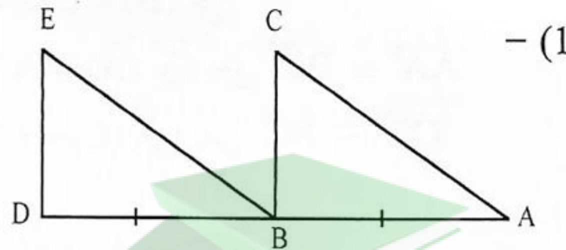
ABC مثلثا و D مماثلة A بالنسبة للنقطة B و E صورة النقطة B بالإزاحة $t_{\overrightarrow{AB}}$.

1) – أنشئ الشكل.

2) – بين أن المثلث ABC هو صورة المثلث BDE بإزاحة T يتم تحديد متجهتها.

الجواب :

1) –



لدينا $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = E$ إذن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$ ومنه الرباعي ACEB متوازي الأضلاع.

2) – لدينا D مماثلة A بالنسبة لـ B إذن $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$ لدينا $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = E$ إذن الرباعي ACE متوازي الأضلاع ومنه :

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$

إذن $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = D$ و $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = E$

وبما أن $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$

فإن صورة المثلث ABC بالإزاحة $t_{\overrightarrow{AB}}$ هو المثلث BDE. ومنه ABC صورة للمثلث BDE بالإزاحة $t_{\overrightarrow{BA}}$ إذن $T = t_{\overrightarrow{BA}}$

تمرين 13:

A و B و C ثلاث نقط من المستوى (P).

M نقطة تحقق العلاقة : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

1) – بين أن M صورة النقطة A بالإزاحة $\overrightarrow{BC}$.

2) – أ – أنشئ الشكل.

ب – أنشئ النقطة M' صورة النقطة B بالإزاحة $t_{\overrightarrow{AC}}$ وبين أن C منتصف [MM'].

الجواب :

1) – لدينا $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

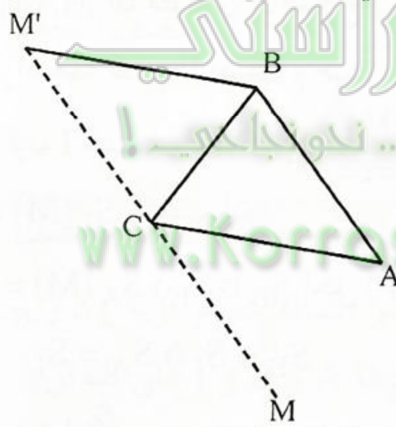
أي أن : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

إذن $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$

أي أن : $t_{\overrightarrow{BC}}(A) = M$

2) أ – لدينا $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$

إذن الرباعي BCMA متوازي الأضلاع.



ب – لدينا $t_{\overrightarrow{BC}}(A) = M'$

أي أن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM'}$

إذن الرباعي ACM'B متوازي الأضلاع.

ب – لدينا BCMA متوازي الأضلاع إذن :

(1) $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$

لدينا ACM'B متوازي الأضلاع إذن :

(2) $\overrightarrow{CM'} = \overrightarrow{AB}$

من (1) و (2) نستنتج أن $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM'}$

إذن C منتصف القطعة [MM'].



تمرين 14:

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى (P).
نربط كل نقطة M من المستوى بالنقطة 'M بحيث :

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{M'A} = \vec{0}$$

بين أن التطبيق f الذي يحول كل نقطة M بالنقطة 'M هو إزاحة حدد متجهتها.

الجواب :

$f(M) = M'$ يعني

$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} \quad 2\overrightarrow{M'A} = \vec{0}$

يعني $2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AM'} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

يعني $2\overrightarrow{MM'} = -3\overrightarrow{AB}$

يعني $\overrightarrow{MM'} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

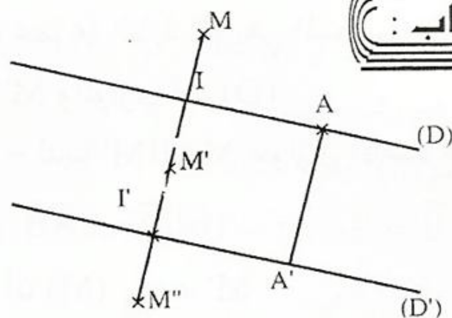
إذن f إزاحة متجهتها $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

أي $f = t_{-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}}$

تمرين 15:

لتكن (D) و (D') مستقيمين متوازيين. نعتبر نقطة A من (D) و 'A نقطة من (D') بحيث يكون المستقيم (AA') عمودي على المستقيم (D). ليكن $S_{(D)}$ التماثل المحوري الذي محوره (D). و $S_{(D')}$ هو التماثل المحوري الذي محوره (D'). أثبت أن : $S_{(D')} \circ S_{(D)} = t_{2\overrightarrow{AA'}}$

الجواب :



لتكن $M \in (P)$

'M صورة M بالتماثل المحوري $S_{(D)}$

أي $S_{(D)}(M) = M'$

"M صورة 'M بالتماثل المحوري $S_{(D')}$

أي $S_{(D')}(M') = M''$

إذن $S_{(D')} \circ S_{(D)}(M) = M''$

لدينا $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'M''}$

$= \overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{M'I'}$

$= \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{II'} = 2\overrightarrow{II'}$

'IAA'I مستطيل إذن $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{AA'}$

ومنه $\overrightarrow{MM''} \quad 2\overrightarrow{AA'}$ أي

$t_{2\overrightarrow{AA'}}(M) = M''$

وبالتالي $S_{(D')} \circ S_{(D)} = t_{2\overrightarrow{AA'}}$

تمرين 16:

1) – لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين بين أن :

$$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$$

2) – ماهي طبيعة الرباعي ABCD علما أن :

$$t_{\overrightarrow{BD}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{BC}}$$

الجواب :

1) – لتكن M نقطة من المستوى.

M_1 صورة M بالإزاحة $t_{\vec{v}}$ أي $t_{\vec{v}}(M) = M_1$

M_2 صورة M1 بالإزاحة $t_{\vec{u}}$ أي

$t_{\vec{u}}(M_1) = M_2$

إذن $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}(M) = M_2 \quad (1)$

وهذا يعني أن $t_{\vec{u}+\vec{v}}(M) = M_2 \quad (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$

2) – لدينا $t_{\overrightarrow{BD}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{BC}}$



يعني $t_{\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{BC}}$

يعني $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

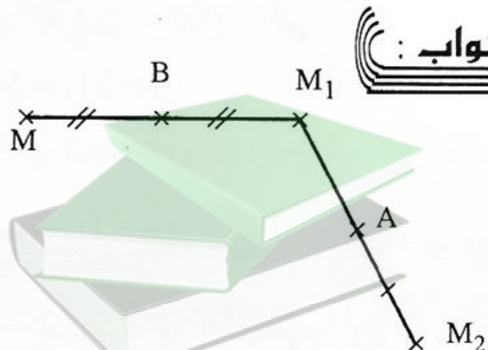
يعني $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

وهذا يعني أن ABCD متوازي الأضلاع.

تمرين 17:

نعتبر الشماثلين المركزيين S_A و S_B.
أثبت $S_A \circ S_B$ هو الإزاحة ذات المتجهة $-2\overrightarrow{AB}$.

الجواب :



لتكن $M \in (P)$

ولتكن M_1 صورة M بـ S_B

أي $S_B(M) = M_1$

M_2 صورة M_1 بـ S_A

أي $S_A(M_1) = M_2$

ومنه $S_A \circ S_B(M) = M_2$

$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_2}$

$= \overrightarrow{BM_1} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{M_1A}$

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$

$= 2\overrightarrow{BA}$

ومنه $\overrightarrow{MM_2} = -2\overrightarrow{BA}$

وهذا يعني $t_{-2\overrightarrow{AB}}(M) = M_2$

وبالتالي : $S_A \circ S_B = t_{-2\overrightarrow{AB}}$

تمرين 18:

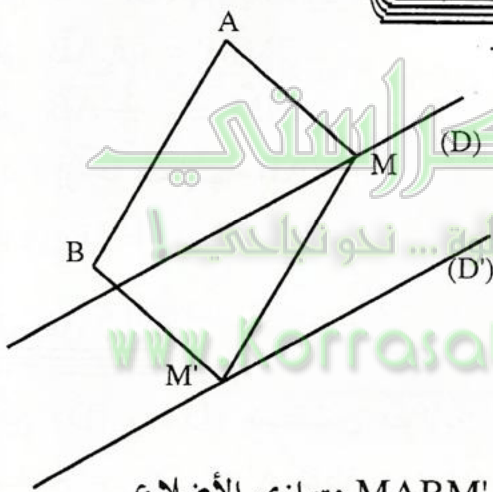
A و B نقطتان.

1) – (D) مستقيم معلوم و M نقطة تتغير عليه
ماهي مجموعة النقط M' بحيث يكون الرباعي MABM' متوازي الأضلاع ؟

2) – ($\mathscr{E}$) دائرة معلومة و M نقطة تتغير عليها.
ماهي مجموعة النقط M' حيث MABM' متوازي الأضلاع ؟

الجواب :

1) –



لدينا MABM' متوازي الأضلاع

إذن $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BC}$ أي أن $M' = t_{\overrightarrow{AB}}(M)$

إذن M' صورة M بالإزاحة $t_{\overrightarrow{AB}}$

وبما أن M تتغير على المستقيم (D) فإن M'
تتغير على المستقيم (D') صورة (D) بالإزاحة $t_{\overrightarrow{AB}}$.

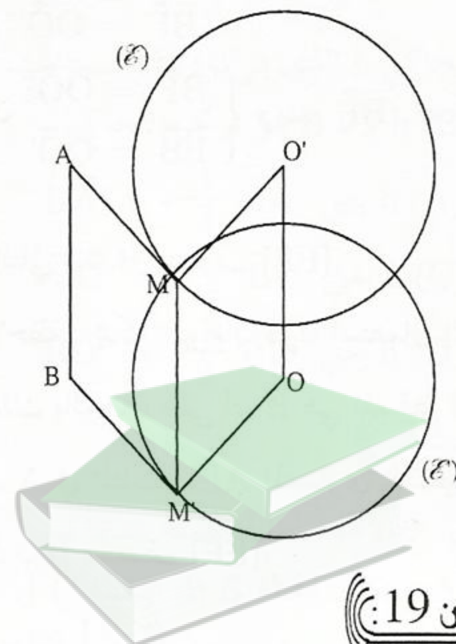
إذن مجموعة النقط M' هي المستقيم (D') المار من M' والموازي لـ (D)

2) – لدينا MABM' متوازي الأضلاع

إذن $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

أي أن $M' = t_{\overrightarrow{AB}}(M)$

إذن M' صورة M بالإزاحة $t_{\vec{AB}}$ بما أن M تتغير على الدائرة $(\mathscr{C})$ فإن M' تتغير على الدائرة $(\mathscr{C}')$ صورة $(\mathscr{C})$ بالإزاحة $t_{\vec{AB}}$ إذن مجموعة النقط M' هي الدائرة $(\mathscr{C}')$ صورة $(\mathscr{C})$ بالإزاحة $t_{\vec{AB}}$.



تمرين 19:

نعتبر نقطتين مختلفتين A و B من المستوى (P).
لتكن F التطبيق الذي يربط كل نقطة M بالنقطة M' بحيث :

$$\vec{M'A} - \vec{M'B} + 5\vec{MM'} = \vec{0}$$

1 – باستعمال الخاصية المميزة بين أن f إزاحة.

2 – حدد متجهة الإزاحة f.

الجواب :

1) – لتكن M و N نقطتين من (P) و M' و N' صورتيهما بـــ f

$f(M) = M'$ يعني

$$(1) \quad \vec{M'A} - \vec{M'B} + 5\vec{MM'} = \vec{0}$$

$f(N) = N'$ يعني

$$(2) \quad \vec{N'A} - \vec{N'B} + 5\vec{NN'} = \vec{0}$$

من (1) – (2) نستنتج أن

$$\vec{M'A} - \vec{M'B} + 5\vec{MM'} - \vec{N'A} + \vec{N'B} - 5\vec{NN'} = \vec{0}$$

يعني $\vec{BA} + 5\vec{MM'} + \vec{BA} - 5\vec{NN'} = \vec{0}$

يعني $5\vec{MN} + 5\vec{NM'} - 5\vec{NM'} - 5\vec{M'N'} = \vec{0}$

يعني $5\vec{MN} = 5\vec{M'N'}$

يعني $\vec{M'N'} = \vec{MN}$

إذن f إزاحة

2) – $f(M) = M'$ يعني

$$\vec{M'A} - \vec{M'B} + 5\vec{MM'} = \vec{0}$$

يعني $\vec{BA} + 5\vec{MM'} = \vec{0}$

يعني $\vec{MM'} = \frac{1}{5}\vec{AB}$

يعني $t_{\frac{1}{5}\vec{AB}}(M) = M'$

ومنه $f = t_{\frac{1}{5}\vec{AB}}$ أي f إزاحة متجهتها $\vec{u} = \frac{1}{5}\vec{AB}$

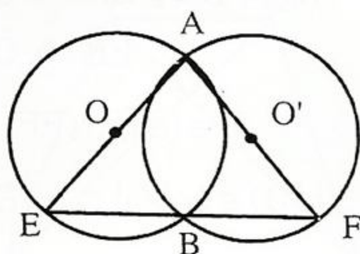
تمرين 20:

لتكن $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ دائرتين متقايستين ومتقاطعتين في نقطتين A و B النقطتان E و F متقابلتان قطريا للنقطة A على كل من الدائرتين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$.

1 – أثبت أن النقط B ، E و F مستقيمية.

2 – بين أن B منتصف [EF].

الجواب :



1) – لدينا [AE] قطر في الدائرة $(\mathscr{E})$ و $B \in (\mathscr{E})$

إذن $E\hat{B}A \quad \frac{\pi}{2}$

كذلك [AF] قطر في الدائرة $(\mathscr{E}')$ و $B \in (\mathscr{E}')$

إذن $A\hat{B}F \quad \frac{\pi}{2}$

ومنه

$$E\hat{B}F = E\hat{B}A + A\hat{B}F = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

وبالتالي E، B، F نقط مستقيمية.

2) – نعتبر المثلث AEF و O منتصف [AE]

و O' منتصف [AF] إذن $2\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{EF}$

إذن $EF = 2OO'$ ومنه $EF > OO'$

نعتبر الإزاحة t التي متجهتها $\overrightarrow{OO'}$

لدينا $t(O) = O'$ لأن $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OO'}$ ، $(\mathscr{E})$

و $(\mathscr{E}')$ لهما نفس الشعاع إذن :

$t((\mathscr{E})) = (\mathscr{E}')$

ولدينا $E \in (\mathscr{E}) \cap (EF)$ إذن

$t(E) \in t((\mathscr{E})) \cap t((EF))$

يعني $t(E) \in (\mathscr{E}') \cap (EF)$

ملاحظة : $t((EF)) = (EF)$ لأن متجهة الإزاحة t . $\overrightarrow{OO'}$ موجهة لـ (EF)

إذن : $t(E) \in \{B , F\}$

لأن $(\mathscr{E}') \cap (EF) \; \{B , F\}$

ومنه $t(E) = B$ أو $t(E) = F$

وبما أن $EF > OO'$ فإن $t(E) = B$

أي $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OO'}$

كذلك : $B \in (\mathscr{E}) \cap (EF)$

إذن $t(B) \in t((\mathscr{E})) \cap t((EF))$

يعني $t(B) \in (\mathscr{E}') \cap (EF)$

يعني $t(B) \in \{B , F\}$

وحيث أن الإزاحة t لا تقبل نقطة صامدة

لأن $\overrightarrow{OO'} \neq \vec{0}$ فإن $t(B) = F$

أي $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OO'}$

إذن $\begin{cases} \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OO'} \\ \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OO'} \end{cases}$ ومنه $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BF}$

وبالتالي فإن B منتصف [EF].

ملاحظة : يمكن البرهان ذون استعمال الإزاحة وذلك بالبرهان على أن B هي المسقط العمودي لـ A في المثلث AEF المتساوي الساقين ومنه تكون B منتصف [EF].

تمرين 21:

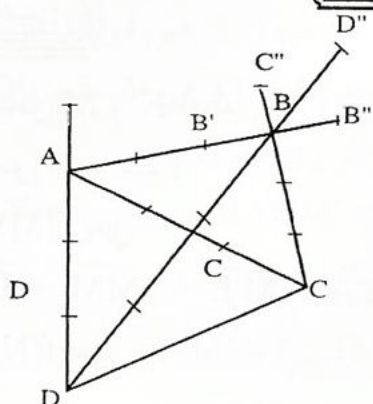
لتكن ABCD رباعيا.

أنشئ صور النقط A و B و C و D

– بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $\frac{2}{3}$.

– بالتحاكي الذي مركزه B ونسبته $-\frac{1}{3}$.

الجواب :





نعتبر التحاكي h بحيث : $h = h\left(A, \frac{2}{3}\right)$

$h(A) = A$ لأن A مركز التحاكي h.

$h(B) = B'$ يعني $\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$h(C) = C'$ يعني $\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$h(D) = D'$ يعني $\overrightarrow{AD'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

نعتبر التحاكي h الذي مركزه B ونسبته $-\frac{1}{3}$.

$h(B') = B$ لأن B هو مركز التحاكي

$h(A) = A''$ يعني $\overrightarrow{BA''} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$h(C) = C''$ يعني $\overrightarrow{BC''} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$h(D) = D''$ يعني $\overrightarrow{BD''} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

تمرين 22:

حدد في الحالات التالية نسبة التحاكي الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C في كل حالة :

1) $3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

2) $\overrightarrow{CA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

3) $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$

4) $\overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AB}$

الجواب :

ليكن h تحاكي مركزه A ونسبته k ويحول B إلى C.

1) $3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

يعني $\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

يعني $h(B) = C$ حيث $h = h\left(A, -\frac{2}{3}\right)$

وبالتالي $k = -\frac{2}{3}$

2) $\overrightarrow{CA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$

يعني $\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

يعني $h(B) = C$ حيث $h = h\left(A, +\frac{2}{3}\right)$

وبالتالي $k = -\frac{2}{3}$

3) $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

يعني $h(B) = C$ حيث $h = h\left(A, \frac{2}{3}\right)$

وبالتالي $k = \frac{3}{2}$

4) لدينا $\overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AB}$

يعني $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$

يعني $h(B) = C$ حيث $h = h(A, 3)$

وبالتالي $k = 3$

تمرين 23:

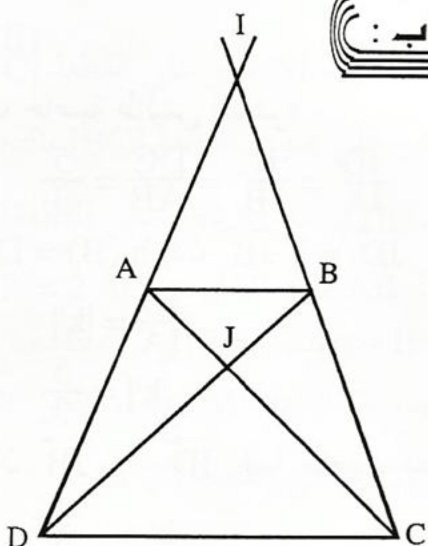
ABCD شبه منحرف حيث :

$(AB) // (CD)$ و $AB = 3$ و $CD = 5$

1) – حدد مركز ونسبة التحاكي h الذي يحول A إلى D و يحول B إلى C.

2) – حدد مركز ونسبته التحاكي h' الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D.

الجواب :





1) – نعتبر : $h(I,k)$

لدينا $h(A) = D$ و $h(B) = C$

إذن $\overrightarrow{ID} = k\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{IC} = k\overrightarrow{IB}$

إذن النقط I و A و D مستقيمية والنقط I و B و C مستقيمية وبالتالي $I \in (BC)$

و $I \in (AD)$

إذن I هي نقطة تقاطع (BC) و (ID)

لدينا حسب خاصية طاليس المباشرة في المثلث IDC :

$$\frac{ID}{IA} = \frac{IC}{IB} = \frac{DC}{AB} = \frac{5}{3}$$

وبما أن $\overrightarrow{ID} = k\overrightarrow{IA}$ فإن

$$\frac{ID}{IA} = |k|$$

إذن $|k| = \frac{5}{3}$ وبما أن $\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{ID}$ لهما نفس المنحى فإن $k = \frac{5}{3}$

إذن $h\left(I, \frac{5}{3}\right)$

2) – نعتبر $h'(J,k')$

لدينا $h(A) = C$ و $h(B) = D$

إذن J هي نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و (BD)

حسب خاصية طاليس المباشرة

لدينا $\frac{JD}{JA} = \frac{JC}{JB} = \frac{DC}{AB} = \frac{5}{3}$

لدينا $h(B) = D$ إذن $\overrightarrow{JD} = k'\overrightarrow{JB}$

إذن $\frac{JD}{IA} = |k'|$

أي أن $|k'| = \frac{5}{3}$

وبما أن $\overrightarrow{JB}$ و $\overrightarrow{JD}$ لهما منحيين متعاكسين

فإن $k' = -\frac{5}{3}$

إذن $h'\left(J, -\frac{5}{3}\right)$

تمرين 24:

لتكن A و B نقطتين ثابتتين من (P) نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M بالنقطة M' بحيث : $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$

أثبت أن f تحاك مركزه I منتصف [AB] وحدد نسبته.

الجواب :

$f(M) = M'$ يعني $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$

يعني

$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{IB}$

يعني $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IM'} = 6\overrightarrow{MI}$

يعني $\overrightarrow{IM'} = 6\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MI}$

يعني $\overrightarrow{IM'} = -5\overrightarrow{IM}$

إذن f هو التحاكي الذي نسبته $k = -5$ ومركزه I منتصف [AB].

تمرين 25:

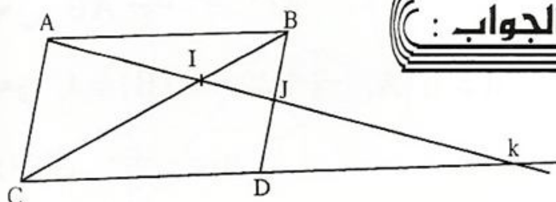
لتكن ABCD متوازي الأضلاع و I نقطة معلومة تنتمي إلى [BD].

لتكن h التحاكي الذي مركزه I و يحول B إلى D.

1 – حدد $h(A)$ و $h(J)$

2 – أثبت أن $IA^2 = IJ \times IK$.

الجواب :



لدينا $h(B) = D$

إذن صورة المستقيم (AB) هي المستقيم المار من D والموازي لـ (AB) أي (DC)

ولدينا $I \in (AI)$ إذن $h((AI)) = (AI)$

لدينا $A \in (AI) \cap (AB)$

إذن $h(A)\ h \in ((AI)) \cap h((AB))$

يعني $h(A) \in h(AI) \cap (DC)$

ولدينا $(AI) \cap (DC) = \{k\}$ وبالتالي

$h(A) = k$ لدينا $h((AI)) = (AI)$

لأن $h \in (AI)$

لدينا $h(B) = D$ إذن صورة (BC) هي المستقيم المار من D والموازي لـ (BC) أي المستقيم (AD).

إذن $h((BC)) = (AD)$

لدينا $J \in (BC) \cap (AD)$

إذن $h(J) \in h((BC) \cap (AI))$

يعني $h(J) \in (AD) \cap (AI)$

لدينا $\{A\}$ $(AD) \cap (AI)$ ومنه $h(J) = A$

2) – لدينا $h(A) = k$ يعني $\overrightarrow{Ik} - k\overrightarrow{IA}$ حيث k نسبة التحاكي h.

$h(J) = A$ يعني $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IJ}$

ومنه $Ik = |k|\, IA$ و $IA = |k|\, IJ$

إذن $\frac{Ik}{IA}$ $\frac{IA}{IJ}$ وبالتالي $IA^2 = IJ \times IK$

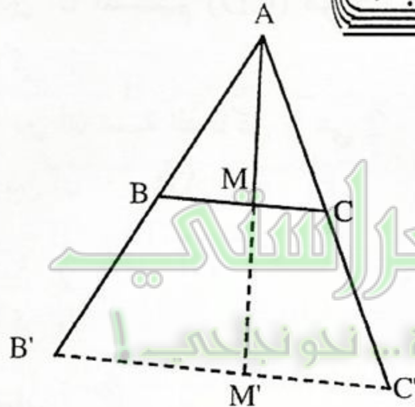
تمرين 26:

لتكن ABC مثلث نربط كل نقطة M من القطعة [BC] بنقطة M' حيث M منتصف [AM'].

1 – بين أنه يوجد تحاك h حيث $h(M) = M'$ لكل M من القطعة [BC].

2 – استنتج مجموعة النقط M' عندما تتغير M على [BC].

الجواب :



1 – لدينا M منتصف [AM']

ومنه $\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM}$

أي أن M' صورة M بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته 2.

2 – إذا كانت M تتغير على القطعة [BC] فإن M' تتغير على صورة القطعة [BC] بالتحاكي $h(A,2)$ أي أن M' تتغير على القطعة [B'C']

حيث : $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AC}$

أي أن B منتصف [AB'] و C منتصف [AC']

إذن مجموعة النقط M' عندما تتغير M على القطعة [BC] هي القطعة [B'C'].



تمرين 27:

ABCD متوازي الأضلاع I و J

بحيث $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$

1 – أنشئ الشكل.

2 – بين أن المستقيم (BJ) هو صورة المستقيم (AI) بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

3 – ليكن h التحاكي الذي مركزه I بحيث $h(B) = C$

أ – بين أن المستقيم (CD) هو صورة (AB) بالتحاكي h.

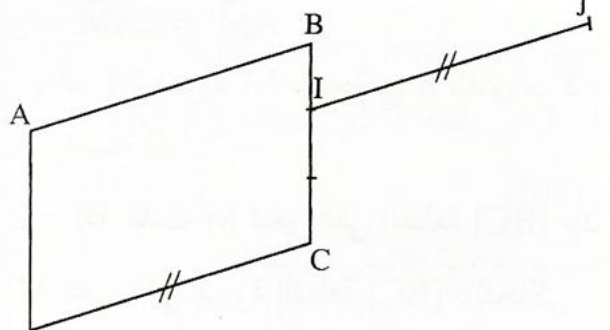
ب – بين أن نسبة التحاكي h هي $k = -2$.

ج – بين أن : $\overrightarrow{kI} = 2\overrightarrow{AB}$

و $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{Ck}$ حيث k هي صورة J بالتحاكي h.

الجواب :

1) –



2) – لتكن t الإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{AB}$ لدينا $t(A) = B$ ولدينا : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}$ إذن ABJI متوازي الأضلاع ومنه (AI) // (BJ)

وحيث أن صورة المستقيم (AI) بالإزاحة t هي مستقيم يوازيه ويمر من B أي (BJ)

ومنه $t((AI)) = (BJ)$

3) – أ – لدينا $h(B) = C$ ونعلم أن صورة المستقيم (AB) بالتحاكي h هي مستقيم يمر من C ويوازي (AB) أي (DC)

ومنه $h((AB)) = (CD)$

ب – لدينا $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

يعني $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$

يعني $\overrightarrow{CI} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$

يعني $\frac{1}{3}\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$

يعني $\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{IB}$

يعني $\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{IB}$

إذن التحاكي الذي مركزه I ويحول B إلى C نسبته $k = -2$

ج – لدينا $h(J) = k$

يعني $\overrightarrow{Ik} = -2\overrightarrow{IJ}$

يعني $\overrightarrow{Ik} = -2\overrightarrow{DC}$

يعني $\overrightarrow{Ik} = -2\overrightarrow{AB}$

يعني $\boxed{\overrightarrow{kI} = 2\overrightarrow{AB}}$

لدينا $h(J) = k$ و $h(B) = C$

إذن حسب الخاصية المميزة للتحاكي

فإن $\overrightarrow{Ck} = -2\overrightarrow{BJ}$

يعني $\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{Ck}$

ونعلم أن $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AI}$

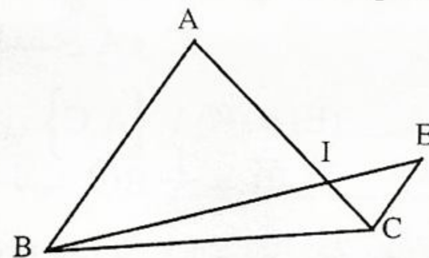
إذن $\boxed{\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{Ck}}$

تمرين 28:

ليكن ABC مثلثا و E النقطة التي تحقق :

$\overrightarrow{CE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

النقطة I هي تقاطع (BE) و (CA) (أنظر الشكل) نعتبر التحاكي h الذي مركزه I ويحول النقطة A إلى النقطة C.



1 – أ – حدد صورة النقطة B بالتحاكي h.

ب – استنتج نسبة التحاكي h.

2 – المستقيم المار من النقطة E والموازي للمستقيم (BC) يقطع المستقيم (AI) في النقطة J. بين أن صورة النقطة C بالتحاكي h هي النقطة J.

الجواب :

1) – أ – لدينا مركز التحاكي h هو النقطة I

لدينا $I \in (BI)$ ومنه $h((BI)) = (BI)$

لدينا $h(A) = C$ إذن صورة المستقيم (AB) هي مستقيم يمر من C ويوازي (AB) أي (EC) ومنه $h((AB)) = (EC)$

لدينا $B \in (BI) \cap (AB)$

إذن $h(B) \in h((BI)) \cap h((AB))$

أي $h(B) \in (BI) \cap (EC)$

وبما أن $(BI) \cap (EC) = \{E\}$ فإن $h(B) = E$

ب – لتكن k نسبة التحاكي h

لدينا $h(A) = C$ و $h(B) = E$ إذن حسب الخاصية المميزة للتحاكي h هي $\overrightarrow{CE} = k\,\overrightarrow{AB}$

ولدينا $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ إذن نسبة التحاكي h هي $k = \frac{1}{3}$

2 – لدينا $I \in (CI)$ إذن $h((CI)) = (CI)$

و $h(B) = E$ إذن صورة المستقيم (BC) بـ h هي مستقيم المار من E والموازي لـ (BC) أي المستقيم (EJ) لدينا $C \in (CB) \cap (CI)$

إذن $h(C) \in h((CB)) \cap ((CI))$

أي $h(C) \in (EJ) \cap (CI) = \{J\}$

وبالتالي $h(C) = J$

تمرين 29:

A و B و C ثلاث نقط حيث B منتصف القطعة [AC]. (Δ) مستقيم مار من القطعة A ويخالف (AB) وغير عمودي على (AB). B' و C' هما المسقطان العموديان على التوالي للنقطتين B و C على (Δ). I نقطة تقاطع المستقيمين (BC') و (B'C) وليكن h التحاكي الذي مركزه I ويحول B إلى C'.

1) – حدد $h(B')$ واحسب k نسبة التحاكي h.

2) – أ – حدد العدد الحقيقي α حيث $\overrightarrow{BI} = \alpha\,\overrightarrow{BC'}$.

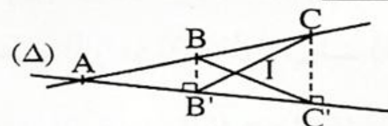
ب – حدد مجموعة النقط (E) للنقطة C' عندما تتغير على (Δ).

ج – حدد مجموعة النقط (F) للنقطة I عندما يتغير (Δ).

3) – أنشئ الشكل علما أن AB = 4 cm.



الجواب :



1) – لدينا $h(B) = C'$ إذن $\overrightarrow{IC'} = k\,\overrightarrow{IB}$

حسب مبرهنة طاليس المباشرة

لدينا : $\overrightarrow{IC'} = k\,\overrightarrow{IB}$

أي أن $h(B') = C$

لدينا $h(B) = C'$ و $h(B') = C$

إذن حسب الخاصية المميزة للتحاكي فإن :

$\overrightarrow{CC'} = k\,\overrightarrow{B'B}$

إذن $|k| = \dfrac{CC'}{B'B}$

نعتبر المثلث ACC'.

لدينا B منتصف [AC] و (BB') // (CC')

إذن B' منتصف [AC'] و $CC' = 2\,B'B$

ومنه $\dfrac{CC'}{B'B} = 2$

إذن $|k| = 2$ وبما أن $\overrightarrow{B'B}$ و $\overrightarrow{CC'}$ لهما منحيان متعاكسان

فإن $k = -2$

2) – أ –

لدينا $h(B) = C'$ إذن $\overrightarrow{IC'} = k\,\overrightarrow{IB}$

ومنه $\overrightarrow{IC'} = -2\,\overrightarrow{IB}$

أي أن $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC'} = -2\,\overrightarrow{IB}$

إذن $3\,\overrightarrow{IB} = -\,\overrightarrow{BC'}$

ومنه $\overrightarrow{IB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC'}$

إذن $\alpha = \dfrac{1}{3}$

ب – لدينا الزاوية $A\hat{C'}C$ قائمة و A و C نقطتان ثابتتان إذن عندما يتغير المستقيم (Δ) فإن النقطة C' تتغير على الدائرة ($\mathscr{E}$) التي أحد أقطارها [AC].

النقطة $C' \neq A$ و $C' \neq C$

إذن مجموعة النقط C' هي الدائرة ($\mathscr{E}$) محرومة من النقطتين A و C.

وبالتالي $(E) = (\mathscr{E}) \setminus \{A,C\}$

ج – لدينا $\overrightarrow{IB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC'}$

أي أن I صورة C' بالتحاكي $h'\left(B, \dfrac{1}{3}\right)$

إذن عندما تتغير النقطة C' على الدائرة $\{A,C\} \setminus (\mathscr{E})$ فإن النقطة I تتغير على الدائرة ($\mathscr{E}'$) صورة ($\mathscr{E}$) بالتحاكي $h'\left(B, \dfrac{1}{3}\right)$ محرومة من النقطتين A' و B' حيث :

$h'(A) = A'$ و $h'(C) = C'$

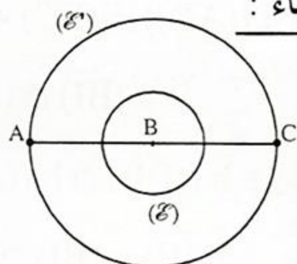
ولدينا شعاع الدائرة ($\mathscr{E}'$) هو :

$r' = \dfrac{1}{3} \times r$

حيث r شعاع الدائرة ($\mathscr{E}$) ومركز ($\mathscr{E}'$) هو صورة مركز ($\mathscr{E}$).

إذن $F = (\mathscr{E}') \setminus \{A',C'\}$

3) – الإنشاء :



بما أن [AC] قطرا لـــ ($\mathscr{E}$) فإن B مركزها.

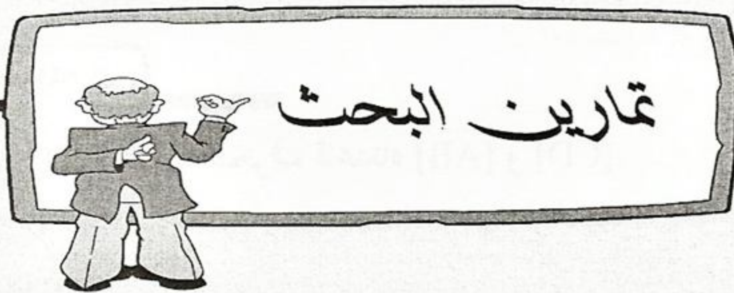
مركز ($\mathscr{E}'$) هو النقطة B'

حيث $h'(B) = B'$

أي أن $h'(B) = B$ شعاع ($\mathscr{E}'$) هو :

$r' = \dfrac{1}{3} \times r = \dfrac{1}{3} \times 4$

$= \dfrac{4}{3}$



تمرين 1 :

ABCD متوازي الأضلاع مركزه o.

I منتصف [AB] و J منتصف [CD].

المستقيمان (ID) و (BJ) يقطعان (AC) في M و N على التوالي.

1) – حدد طبيعة الرباعي NIMJ.

2) – بين أن : AM = MN = NC

تمرين 2 :

لتكن $(\mathscr{E})$ دائرة مركزها o وشعاعها r = 3 cm و A و B نقطتان.

نعتبر النقطة M تتغير على الدائرة $(\mathscr{E})$.

لتكن M' النقطة بحيث يكون الرباعي AMBM' متوازي الأضلاع.

ماهي مجموعة النقط M' عندما تتغير M على الدائرة $(\mathscr{E})$.

تمرين 3 :

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى (P).

– بين أنه لكل نقطة M من المستوى (P) توجد نقطة وحيدة M'

بحيث : $\overrightarrow{M'A} - \overrightarrow{M'B} + 3\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{0}$

– ماهي طبيعة التطبيق الذي يربط النقطة M بالنقطة M' المعرفة بالمتساوية السابقة.

تمرين 4 :

ABC مثلث و M منتصف [AB].

لتكن E صورة النقطة C بالإزاحة $t_{\overrightarrow{BM}}$.

المستقيمان (AC) و (EM) يتقاطعان في F.

1) – ماذا تلاحظ بالنسبة للقطعتين [MC] و [BE] ؟

2) – ماهو مركز ثقل المثلث CME ؟ علل جوابك.



تمرين 5 :

ليكن ABCD شبه منحرف قاعدتاه [AB] و [CD].
A و B نقطتان ثابتتان حيث : AB = 4 cm والنقطتان C و D تتغيران حيث : AD = 3cm
و DC = 6 cm.
1 – ماهي مجموعة كل من النقطتين C و D ؟
2 – أنشئ الشكل.

تمرين 6 :

(1) - ليكن ABC مثلثا و o نقطة لا تنتمي إلى أضلاعه.
أنشئ صورة المثلث ABC بالتحاكي $h\left(o , \frac{4}{3}\right)$.
(2) - ABCD رباعيا محدبا و o نقطة لا تنتمي إلى أضلاعه أنشئ صورة ABCD
بالتحاكي $h\left(o , \frac{3}{2}\right)$.

تمرين 7 :

A و B نقطتان مختلفتان.
1) – حدد مركز التحاكي h الذي نسبته $\frac{2}{3}$ ويحول A إلى B.
2) – حدد مركز التحاكي 'h الذي نسبته (3 -) ويحول B إلى A.

تمرين 8 :

ليكن T التحويل في المستوى (P) الذي يربط كل نقطة M بنقطة 'M
حيث : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ حيث ABC مثلث معلوم.
1 – ماهي صورة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC بالتحويل T ؟
2 – بين أن التحويل T تحاك محددا مركزه ونسبته.

تمرين 9 :

A و B و C ثلاث نقط من المستوى (P) حيث : $\overrightarrow{AG} = 2\ \overrightarrow{BG}$
و T التحويل في المستوى (P) الذي يربط كل نقطة M بنقطة 'M
بحيث : $\overrightarrow{M'A} - 2\overrightarrow{M'B}\quad \overrightarrow{M'M} = \vec{0}$
(1) – ماهي صورة النقطة G بالتحويل T ؟



الجداء السلمي

- عدد الصفحات : [20]
- عدد التمارين : [19]
- عدد تمارين البحث : [11]





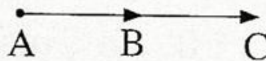
9 الجداء السلمي

I – تعريف :

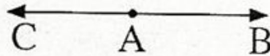
تعريف 1: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين غير منعدمتين.

الجداء السلمي لـ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو العدد الحقيقي الدي نرمز له بـ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ والمعرف بـ :

1 – $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC$ إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتين ولهما نفس المنحى

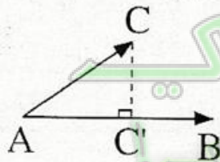


2 – $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB.AC$ إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتين وليس لهما نفس المنحى



3 – بصفة عامة : إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيمية $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$

حيث 'C هي المسقط العمودي لـ C على (AC)



إذا كانت $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ أو $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ فإن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

تعريف 2: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين غير منعدمتين

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(B\hat{A}C)$$

خاصية :

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتين

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$ حيث 'C و 'D المسقطين العمودين لـ C و D على التوالي على (AC).

II – خاصيات :

a - لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات

-1 $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

-2 $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\ \vec{v} + \vec{u}\ \vec{w}$

-3 $(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$

4 - متطابقات هامة :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\ \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}-\vec{v})\quad \vec{u}^2 - 2\vec{u}\ \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2\quad \vec{v}^2$$

b - منظم متجهة :

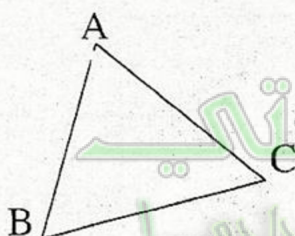
لتكن $\vec{u}$ متجهة بحيث $\vec{u} = \vec{AB}$

المسافة AB تسمى منظم المتجهة $\vec{u}$ ونرمز لها بـ $\|\vec{u}\|$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$ و $\vec{u}^2 = AB^2$

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}\,.\,\vec{v})$$

III - تطبيقات الجداء السلمي :



1 - مبرهنة الكاشي

ABC مثلث إذن :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos(\widehat{A})$$

2 - مبرهنة المتوسط :

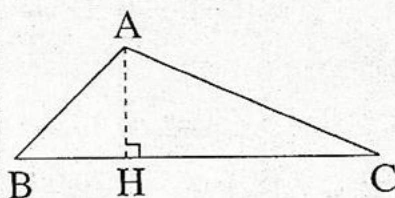
I منتصف [BC] في مثلث ABC

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

3 - العلاقات المترية في مثلث قائم الزاوية :

ABC مثلث H المسقط العمودي لـ A على [BC]

خاصية :



ABC مثلث قائم الزاوية في A إذا وفقط إذا تحقق أحد الشروط التالية :

1 - $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (مبرهنة فيتاغورس)

2 - $AB^2 = BH.BC$

3 - $AC^2 = CH.CB$

4 - $AH^2 = HB.HC$

أي $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{3}{2\,.\,3}$

ومنه $\cos(\alpha)=\frac{1}{2}$

2 - لدينا

$(2\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+3\vec{v})$

$=2\vec{u}^2+6\vec{u}.\vec{v}-\vec{u}.\vec{v}-3\vec{v}^2$

$=2\vec{u}^2+6\vec{u}.\vec{v}-\vec{u}.\vec{v}-3\vec{v}^2$

$=2\|\vec{u}\|^2+5\vec{u}.\vec{v}-3\|\vec{v}\|^2$

$=18+15-12$

إذن $(2\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+3\vec{v})=21$

$(\vec{u}-3\vec{v})^2=\vec{u}^2-6\vec{u}\ \vec{v}+9\vec{v}^2$

$=\|\vec{u}\|^2-6\vec{u}\ \vec{v}+9\|\vec{v}\|^2$

$=9-18+36$

إذن $(\vec{u}-3\vec{v})^2=27$

$\frac{1}{2}\vec{v}.(\vec{v}+4\vec{u})=\frac{1}{2}\vec{v}^2+2\vec{u}.\vec{v}$

$=\frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}$

$=\frac{1}{2}.4+2\,.\,3$

إذن $\frac{1}{2}\vec{v}(\vec{v}+4\vec{u})=8$

تمرين 3 :

1 – ليكن ABCD مستطيلا بين أنه لكل $M\in(P)$

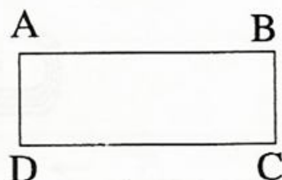
لدينا $MA^2+MC^2=MD^2+MB^2$

2 – ليكن ABCD متوازي أضلاع أثبت أن :

$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$

الجواب :

- 1



$MA^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MC}^2$

$=(\overrightarrow{MD}^2+\overrightarrow{DA}^2)+(\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{BC}^2)$

$=\overrightarrow{MD}^2+2\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{MB}^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2$

$=MD^2+MB^2+2\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MB})+BC^2+BC^2$

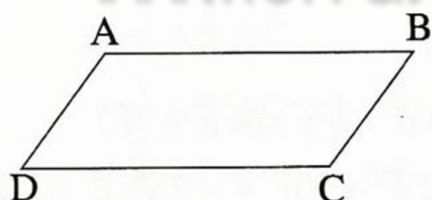
$=MD^2+MB^2+2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DB}+2BC^2$

$=MD^2+MB^2+2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CB}+2BC^2$

$=MD^2+MB^2-2\overrightarrow{BC}^2+2BC^2$

$MA^2+MC^2=MD^2+MB^2$

- 2



لدينا

$AC^2+BD^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2$

$=\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}^2$

$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+BC^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$

$=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

بالتالي :

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$$

تمرين 4 :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين متعامدتين بحيث :

$\|\vec{u}\| = 5$ $\qquad$ $\|\vec{v}\| = 2$

أحسب الجداءات التالية :

$P_1 = (\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + 2\vec{v})$

$P_2 = (3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}).(4\vec{u} + \vec{v})$

$P_3 = (3\vec{u} - 2\vec{v})^2$

الجواب :

لدينا $P_1 = (\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + 2\vec{v})$

$= \vec{u}^2 + 2\vec{u}\,\vec{v} - \vec{u}\,\vec{v} - 2\vec{v}^2$

$= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u}.\vec{v} - 2\|\vec{v}\|^2$

$= 25 + 0 - 2 \times 4$

$P_1 = 17$

$P_2 = (3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}).(4\vec{u} + \vec{v})$

$= 12\vec{u}^2 + 3\vec{u}\,\vec{v} - 2\vec{v}.\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}^2$

$= 12\|\vec{u}\|^2 - \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2$

$= 12 \times 25 - \frac{1}{2}.4$

$= 300 - 2$

إذن $P_2 = 298$

$P_3 = (3\vec{u} - 2\vec{v})^2$

$= 9\vec{u}^2 - 12\vec{u}\,\vec{v} + 4\vec{v}^2$

$= 9 . 25 + 4 . 4$

إذن $P_3 = 241$

تمرين 5 :

ABCD مربع بحيث : $AB = 4$ ولتكن I منتصف [BC]

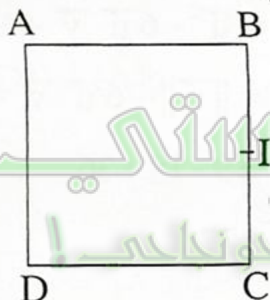
1 – أحسب $\vec{DI} . \vec{IA}$

2 – بين أن $\vec{ID} . \vec{IA} = 12$

ثم استنتج $\cos A\hat{I}D$

3 – لتكن النقطة J بحيث $\vec{IJ} = \frac{1}{3}\vec{IA}$ أحسب المسافة : DJ

الجواب :



$\vec{DI} . \vec{IA} = (\vec{DC} + \vec{CI}).(\vec{IB} + \vec{BA})$

$= \vec{DC}.\vec{IB} + \vec{DC}.\vec{BA} + \vec{CI}.\vec{IB} + \vec{CI}.\vec{BA}$

$= 0 + \vec{AB}.\vec{BA} + \vec{IB}^2 + 0$

$= -AB^2 + \frac{1}{4}BC^2$

$= -16 + 4 = -12$

وبالتالي $\vec{DI} . \vec{IA} = -12$

2 - لدينا

$\vec{ID}.\vec{IA} = -\vec{DI}.\vec{IA} = 12$

إذن $\vec{ID} . \vec{IA} = 12$

$\cos A\hat{I}D = \dfrac{\vec{IA}.\vec{ID}}{IA.ID}$

ولدينا المثلث ABI قائم الزاوية في B

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس فإن :

$$AI^2 = AB^2 + BI^2$$

أي $AI^2 = 16 + 4 = 20$

$$AI = 2\sqrt{5}$$

بنفس الكيفية فإن $ID = 2\sqrt{5}$

ولدينا $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{ID} = 12$

إذن : $\cos \widehat{AID} = \dfrac{12}{2\sqrt{5}.2\sqrt{5}}$

إذن : $\cos \widehat{AID} = \dfrac{3}{5}$

3 – لدينا

$$\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IJ}$$

إذن : $\overrightarrow{DJ}^2 = (\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IJ})^2$

$$= \overrightarrow{DI}^2 + 2\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ}^2$$

$$= \overrightarrow{DI}^2 + 2.\overrightarrow{DI}.\frac{1}{3}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{9}\overrightarrow{IA}^2$$

$$= 20 + \frac{2}{3}.(-12) + \frac{1}{9}.20$$

$$= 20 - 8 + \frac{20}{9}$$

$$= \frac{128}{9}$$

إذن : $DJ = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

تمرين 6 :

ABC مثلث بحيث $AB = 2\sqrt{2}$ و $AC = 3$ و

$$B\widehat{A}C = \frac{\pi}{4}$$

1 – لتكن I منتصف [AB] أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

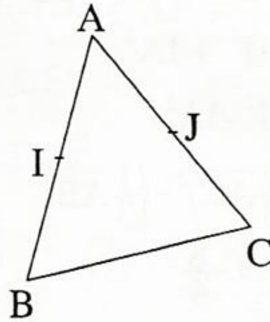
2 – لتكن النقطة J بحيث : $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ}$

3 – أ – أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}$

ب – استنتج أن المثلث AIJ قائم الزاوية ومتساوي الساقين.

الجواب :



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$$

$$= \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2$$

إذن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI} = 4$

2 - لدينا

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB}\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{2}{3}AB\cdot AC\ .\cos\widehat{A}$$

$$= \frac{2}{3}2\sqrt{2}\cdot 3\ .\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

إذن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ} = 4$

3 – أ لدينا :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI})$$

$$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI})$$

$$= 4 - 4$$

إذن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = 0$

ب – لدينا :

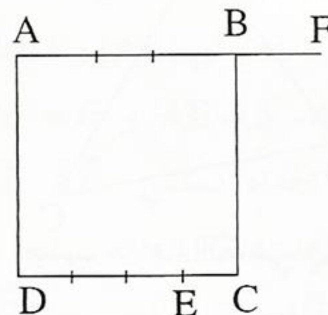
1 – أحسب $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}$

2 – استنتج أن $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{DF}$

3 – أ – أحسب $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$

ب – استنتج $\cos E\hat{A}F$

الجواب :



$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE})\cdot\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

$=\frac{4}{3}\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\frac{4}{3}AB^2+\frac{4}{3}\times\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\frac{4}{3}AB^2-\frac{1}{3}AB^2=AB^2=9$

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=9$

2 – لدينا

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF})$

$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}$

$=-\overrightarrow{AD}^2+0+0+9$

$=-9+9$

إذن $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}=0$

3 - أ

لدينا $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot\overrightarrow{AF}$

$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}$

$=0+9$

إذن $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=9$

ب – لدينا

$$\cos E\hat{A}F=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}}{AE\cdot AF}$$

لدينا $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ ومنه $AF=\frac{4}{3}\cdot AB=4$

$AE^2=AD^2+DE^2$

$=9+(\frac{3}{4}DC)^2$

$=9+\frac{81}{16}$

$AE^2=\frac{225}{16}$

وبالتالي $AE=\frac{15}{4}$

وفي الأخير $\cos E\hat{A}F=\frac{9}{\frac{15}{4}\times 4}$

إذن $\cos E\hat{A}F=\frac{9}{15}$

تمرين 9 :

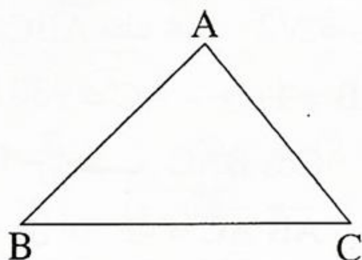
ABC مثلث بحيث $AB=3$ و $BC=\sqrt{6}$

و $\cos\hat{A}=\frac{2}{3}$ و $AC>1$

1 – أحسب AC واستنتج طبيعة ABC.

2 – أ – أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

الجواب :



حسب مبرهنة الكاشي لدينا

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos\widehat{A}$

$6 = 9 + AC^2 - 6AC.\frac{2}{3}$

$AC^2 - 4AC + 3 = 0$

نضع $X = AC$ المعادلة تكافئ

$X^2 - 4X + 3 = 0$

لدينا $\Delta' = 4 - 3 = 1$

إذن $X = 2 - 1$ أو $X = 2 + 1$

ومنه $AC = 1$ أو $AC = 3$

وبما أن $AC > 1$ فإن $AC = 3$

وبالتالي فإن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A

2 - لدينا

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= -\overrightarrow{AB}^2 + AB \times AC \times \cos\hat{A}$

$= -3 + 3 \times 3 \times \frac{2}{3}$

$= -9 + 6$

$= -3$

تمرين 10:

ليكن ABC مثلثا بحيث $BC = 2\sqrt{2}$

و $AC = \sqrt{3}$ و $AB = 1$

1 - أ - أحسب $\cos\widehat{BAC}$

ب - بين أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -2$

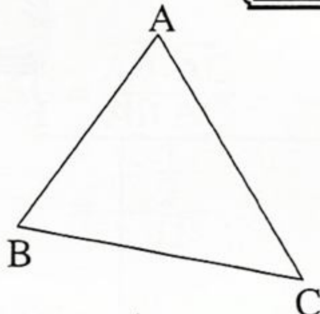
2 - نعتبر نقطة D من المستوى (P) بحيث :

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

أ - أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

ب - استنتج طبيعة المثلث ABD

الجواب :



1 -أ- أحسب مبرهنة الكاشي في المثلث ABC

لدينا :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos\widehat{BAC}$

$2AB.AC\cos\widehat{BAC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC}{2AB.AC}$

$= \frac{1 + 3 - 8}{2.1.\sqrt{3}}$

$= \frac{-4}{2\sqrt{3}}$

إذن $\cos\widehat{BAC} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$

ب - لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{BAC}$

$= 1.\sqrt{3}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)$

إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -2$

2-أ- لدينا $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$= 2\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= 2 - 2$

إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$

ب – لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$

إذن ABD مثلث قائم الزاوية في A

تمرين 11 :

ABC مثلث متساوي الأضلاع بحيث :

AB = 7 E نقطة من [AB] و F نقطة من [AC] بحيث AE = 3 و AF = 6

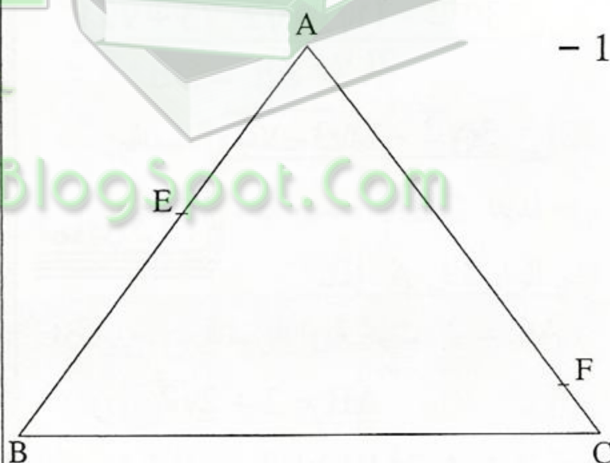
1 – أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$

2 – بين أن المثلث AEF قائم الزاوية في E

3 – بين أن $CE = \sqrt{37}$ ثم أحسب $\cos A\hat{C}E$

الجواب :

1 –



لدينا $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} = AE \cdot AF \cos E\hat{A}F$

$= 3 \cdot 6 \cdot \cos(\frac{\pi}{3})$

$= 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$

وبالتالي $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} = 9$

$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA}.(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF})$

$= \overrightarrow{EA}^2 + \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AF}$

$= AE^2 - \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$

$= 9 - 9$

$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EF} = 0$

ومنه $\overrightarrow{EA} \perp \overrightarrow{EF}$

وبالتالي AEF مثلث قائم الزاوية في E

3 – في المثلث AEC وحسب مبرهنة الكاشي لدينا

$EC^2 = AE^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}$

$= 9 + 49 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos(\frac{\pi}{3})$

$= 9 + 49 - 42 \times \frac{1}{2}$

$= 58 - 21$

$= 37$

وبالتالي $EC = \sqrt{37}$

حسب مبرهنة الكاشي لدينا في المثلث AEC

$AE^2 = CE^2 + CA^2 - 2\,CA.CE \cos E\hat{C}A$

إذن $9 = 37 + 49 - 2 \cdot 7\sqrt{37}.\cos E\hat{C}A$

أي $9 = 86 - 14\sqrt{37}.\cos E\hat{C}A$

$14\sqrt{37}.\cos E\hat{C}A = 86 - 9$

إذن $\cos E\hat{C}A = \frac{77}{14\sqrt{37}}$

$\cos E\hat{C}A = \frac{11}{2\sqrt{37}}$

ومنه $\cos E\hat{C}A = \frac{11\sqrt{37}}{74}$

تمرين 12 :

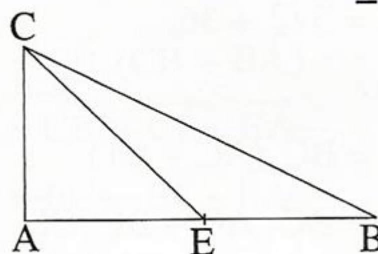
ليكن ABC مثلثا بحيث : $AB = \sqrt{3}$ ، $AC = \sqrt{2} + 1$ ، $\hat{A} = \frac{\pi}{6}$

1 – أ بين أن $BC = \sqrt{3 - \sqrt{2}}$

ب – بين أن $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{3 - 3\sqrt{2}}{2}$

الجواب :

1 – أ –



لدينا AEC مثلث قائم الزاوية

إذن $EC^2 = AE^2 + AC^2$

$= 4 + 4 = 8$

ومنه $EC = 2\sqrt{2}$

ولدينا $EB = AB - AE$

$= 2 + 2\sqrt{2} - 2$

إذن $EB = 2\sqrt{2}$

ومنه $EC = EB$

وبالتالي BEC مثلث متساوي الساقين

ب – لدينا AEC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A إذن

$A\hat{E}C = A\hat{C}E = \frac{\pi}{4}$

ولدينا $B\hat{E}C = \pi - A\hat{C}E$

$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

ولدينا EBC مثلث متساوي الساقين في E

$B\hat{C}E + E\hat{C}B + B\hat{E}C = \pi$

$2B\hat{C}E = \pi - B\hat{E}C$

$= \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

وبالتالي $B\hat{C}E = \frac{\pi}{8}$

2 – لدينا

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EB}$

$= AE.EB$

$= 2.(2\sqrt{2})$

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{EB} = 4\sqrt{2}$

لدينا $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CE}(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EB})$

$= CE^2 + \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{EB}$

$= (2\sqrt{2})^2 + 4\sqrt{2}$

إذن $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CB} = 8 + 4\sqrt{2}$

3 –

$\cos(\widehat{\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CB}}) = \frac{\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CB}}{CE.CB}$

$\cos(B\hat{C}E) = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\ .(2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}$

$CB^2 = AB^2 + AC^2$

$= (2 + 2\sqrt{2})^2 + 4$

$= 4 + 8\sqrt{2} + 8 + 4$

$= 16 + 8\sqrt{2}$

$CB = \sqrt{8(2 + \sqrt{2})}$

إذن $= 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

$\cos(B\hat{C}E) = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}\ .\sqrt{2(2 + \sqrt{2})}}$

$= \frac{4(2 + \sqrt{2})}{8\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

وبالتالي $\cos(B\hat{C}E) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

ومنه $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

تمرين 14 :

ABC مثلث بحيث $BA = 3$ و $BC = 6$

و $A\hat{B}C = \frac{3\pi}{4}$



H المسقط العمودي لــ A على (BC)

1 – بين أن $BH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

2 – أحسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

3– a – لتكن I منتصف [BC]

بين أن $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AI} = 9\sqrt{2} + 18$

b – لتكن M من المستوى (P) بحيث :

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM} = 9\sqrt{2} - 18$

بين أن : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IM} = 0$

واستنتج أن M تنتمي إلى مستقيم (Δ) حدده

الجواب :

1 - لدينا

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$ لأن H المسقط العمودي لــ A على (BC)

ومنه $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = BA.BC\cos\widehat{B}$

إذن $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = 3.\ 6\cos\frac{3\pi}{4}$

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = 18\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

إذن $= -9\sqrt{2}$

$BH.BC = 9\sqrt{2}$

$BH = \frac{9\sqrt{2}}{BC}$

$= \frac{9\sqrt{2}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

ومنه $BH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

2 – لدينا

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}^2$

$= -\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}^2$

$= -BC\ .\ BA\cos\widehat{B} + BC^2$

$= -6\ .\ 3\cos\frac{3\pi}{4} + 36$

$= -18\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 36$

إذن $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 9\sqrt{2} + 36$

3- a - لدينا

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI})$

$= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CI}$

$= 9\sqrt{2} + 36 + \overrightarrow{BC}.\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)$

$= 9\sqrt{2} + 36 - 18$

إذن $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AI} = 9\sqrt{2} + 18$

- b - لدينا

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM})$

$= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}$

$= 9\sqrt{2} + 18 - 9\sqrt{2} - 18$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IM} = 0$

لدينا $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IM} = 0$ يعني M تنتمي إلى المستقيم (Δ) المار من I والعمودي على (BC)

تمرين 15 :

ABC مثلث بحيث $BC = 3$ و$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 12$

وقياس الزاوية $[B\widehat{C}A]$ هو 45°

1 - a - تحقق أن $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = 4$

b - استنتج قيمة AC

2 - أحسب المسافة AB

3 - ليكن I منتصف [BC] أحسب المسافة AI

4 - لتكن H النقطة من [BC] بحيث :

$\overrightarrow{BH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

a - أحسب $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$

b - استنتج أن (AH) ارتفاع للمثلث ABC



الجواب :

1 - a - لدينا

$$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}.(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA})$$

$$= \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CB}\,.\,\overrightarrow{BA}$$

$$= BC^2 - \overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BA}$$

$$= 16 - 12$$

إذن $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = 4$

b - لدينا

$$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = CB.CA \cos(\widehat{C})$$

$$CA = \frac{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}}{CB.\cos(\widehat{C})}$$

$$CA = \frac{4}{4.\cos(45°)}$$

$$CA = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$AC = \sqrt{2}$$

2 – في المثلث ABC لدينا حسب مبرهنة الكاشي :

$$AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$$

$$= 16 + 2 - 2 . 4$$

$$= 10$$

وبالتالي $AB = \sqrt{10}$

3 - لدينا I منتصف [BC] إذن حسب مبرهنة المتوسط

$$AB^2 + AC^2 = AI^2 + \frac{1}{2} BC^2$$

$$2AI^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2} BC^2$$

$$= 10 + 2 - 8$$

$$2AI^2 = 4$$

$$AI^2 = 2$$

$$AI = \sqrt{2}$$

4 - لدينا

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}).\overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$$

$$= -12 + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}^2$$

$$= -12 + \frac{3}{4} . 16$$

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = -12 + 12$$

إذن $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$

b - لدينا $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$

إذن $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$

وبالتالي (AH) ارتفاع في المثلث ABC

تمرين 16 :

ABC مثلث بحيث $AB = 5\sqrt{2}$ و $AC = 4\sqrt{2}$

$\widehat{A} = 60°$

1 - أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ والمسافة BC

2 - ليكن H المسقط العمودي لـ B على (AC) أحسب المسافة AH.

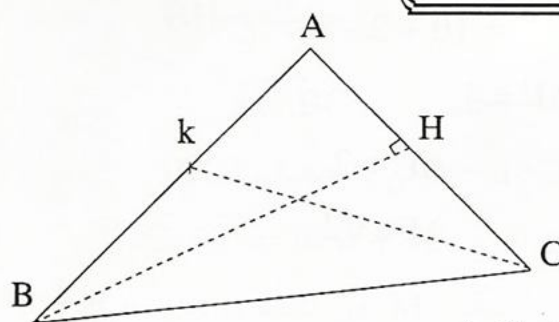
3 - k نقطة من القطعة [AB] حيث $Ak = 2\sqrt{2}$

تحقق أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{Ak} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

واستنتج أن $(AB) \perp (CK)$

4 - أحسب المسافة Hk.

الجواب :



1 - لدينا :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC\cos(\hat{A})$

$= 5\sqrt{2} . 4\sqrt{2} \cos(60)$

$= 40 . \frac{1}{2}$

إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 20$

حسب مبرهنة الكاشي لدينا :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= 50 + 32 - 2.20$

$BC^2 = 42$

$BC = \sqrt{42}$

2 - لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}$ لأن H المسقط العمودي لـ B على (AC)

$20 = AH.AC$

$AH = \frac{20}{AC}$

$= \frac{20}{4\sqrt{2}}$

إذن $AH = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

3 - $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{Ak} = AB . Ak$ متجهتين مستقيميتين ولهما نفس المنحى

$= 5\sqrt{2} . 2\sqrt{2}$

$= 20$

ولدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 20$

إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{Ak} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

يعني $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{Ak} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

يعني $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{Ak} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

يعني $\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{Ak} - \overrightarrow{AC}) = 0$

يعني $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{Ck} = 0$

ومنه $(AB) \perp (Ck) = 0$

4 - في المثلث AkH وحسب مبرهنة الكاشي لدينا :

$KH^2 = Ak^2 + AH^2 - 2\overrightarrow{Ak}.\overrightarrow{AH}$

$= (2\sqrt{2})^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) - 2Ak.AH\cos(60°)$

$= 8 + \frac{25}{2} - 20$

$= \frac{25}{2} - 12$

$= \frac{1}{2}$

وبالتالي : $KH = \frac{\sqrt{2}}{2}$

تمرين 17 :

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A بحيث:

$AC = 6$ و $\cos\hat{B} = \frac{4}{5}$

1 - أحسب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

2 - أ - تحقق من أن $\sin\hat{B} = \frac{3}{5}$

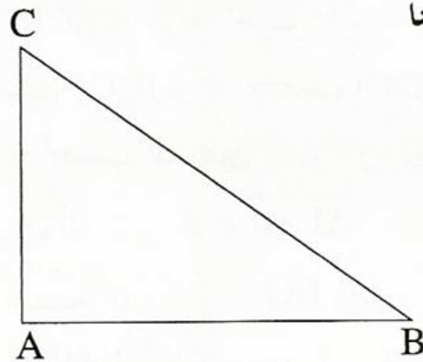
ب - أحسب BC واستنتج $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA}$

3 - ليكن I منتصف القطعة [BC] أحسب المسافة AI



الجواب :

1 - لدينا



$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA}$ لأن A المسقط العمودي لـ B على (AC)

$= CA^2$

$= 36$

وبالتالي $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 36$

2 - أ – لدينا

$\sin^2\hat{B} + \cos^2\hat{B} = 1$

يعني $\sin^2\hat{B} = 1 - \cos^2\hat{B}$

$= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$

إذن $= \frac{9}{25}$

إذن $\sin\hat{B} = \frac{3}{5}$ لأن $0 \leqslant \hat{B} \leqslant 90°$

ب – لدينا $\sin(\hat{B}) = \frac{AC}{BC}$

إذن $\sin(\hat{B}) . BC = AC$

$BC = \frac{AC}{\sin(\hat{B})}$

$= \frac{6}{\frac{3}{5}}$

إذن $BC = 10$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}.(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$

$= \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$

$= -\overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$

$= -100 + 36$

إذن $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA} = -64$

3 - I منتصف القطعة [BC] إذن حسب مبرهنة المتوسط

$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$

إذن $2AI^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$

$AI^2 = \frac{1}{2}\left(BC^2 - \frac{1}{2}BC^2\right)$

$= \frac{1}{4}BC^2$

ومنه $AI = \frac{1}{2}BC$

ومنه $AI = 5$

تمرين 18 :

ليكن ABC مثلث بحيث $AC = 4$ و $AC = \sqrt{3}$

و $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -3$

1 - بين أن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$

2 - حدد قياسا للزاوية $B\hat{A}C$

3 - بين أن : $BC = \sqrt{7}$

4 - لتكن I منتصف [BC] أحسب المسافة AI

5 - لتكن H المسقط العمودي لـ C على (AB)

أحسب المسافة BH.

الجواب :

1 - لدينا

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

$= 3 + 3$

ومنه $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$

2 - لدينا

$$\cos B\hat{A}C = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AB}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{3} \cdot 4}$$

إذن $\cos B\hat{A}C = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3 - حسب مبرهنة الكاشي :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= 3 + 16 - 2 \cdot 6$$

$$= 7$$

وبالتالي $BC = \sqrt{7}$

4 - I منتصف [BC] إذن حسب مبرهنة الكاشي فإن :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

$$2AI^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$$

$$= 3 + 16 - \frac{7}{2}$$

$$AI^2 = \frac{31}{4}$$

ومنه $AI = \frac{\sqrt{31}}{2}$

5 - لتكن H المسقط العمودي لــ C على (AB)

إذن $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH}$

$$|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}| = BA \cdot BH$$

$$BH = \frac{3}{BA} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

ومنه $BH = \sqrt{3}$

تمرين 19 :

ليكن ABCD مربعا بحيث $AB = \sqrt{3}$

I منتصف [BC] و J منتصف [DC]

1 - أ – أحسب المسافتين AI و AJ

ب – بين أن : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = 3$

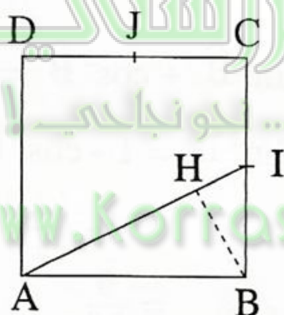
ج – استنتج أن : $\cos I\hat{A}J = \frac{4}{5}$

2 - ليكن H المسقط العمودي لــ B على AI

أ – بين أن $AH = \frac{2\sqrt{15}}{5}$

ب – أحسب المسافة HI

الجواب :



1 - أ – لدينا ABI مثلث قائم الزاوية B

$$AI^2 = AB^2 + BI^2$$

$$= 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

$$AI = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

بنفس الطريقة فإن $AJ = \frac{\sqrt{15}}{2}$

ب – لدينا

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ})$$

$$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{DJ}$$

$$=0+\overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}+0$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$$

ومنه $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=3$

$$\cos I\hat{A}J=\frac{\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}}{AI\ .\ AJ}$$

$$=\frac{3}{\frac{\sqrt{15}}{2}\ .\ \frac{\sqrt{15}}{2}}$$

$$=\frac{12}{15}$$

وبالتالي $\cos I\hat{A}J=\frac{4}{5}$

أ – لدينا ABI مثلث قائم الزاوية في B.

و H المسقط العمودي لــ B على (AI)

$$AB^2=AH\ .\ AI$$

$$AH=\frac{AB^2}{AI}$$

$$AH=\frac{3}{\frac{\sqrt{15}}{2}}$$

$$AH=\frac{6\sqrt{15}}{15}$$

إذن $AH=\frac{2\sqrt{15}}{5}$

ب – باعتبار نفس المعطيات لدينا

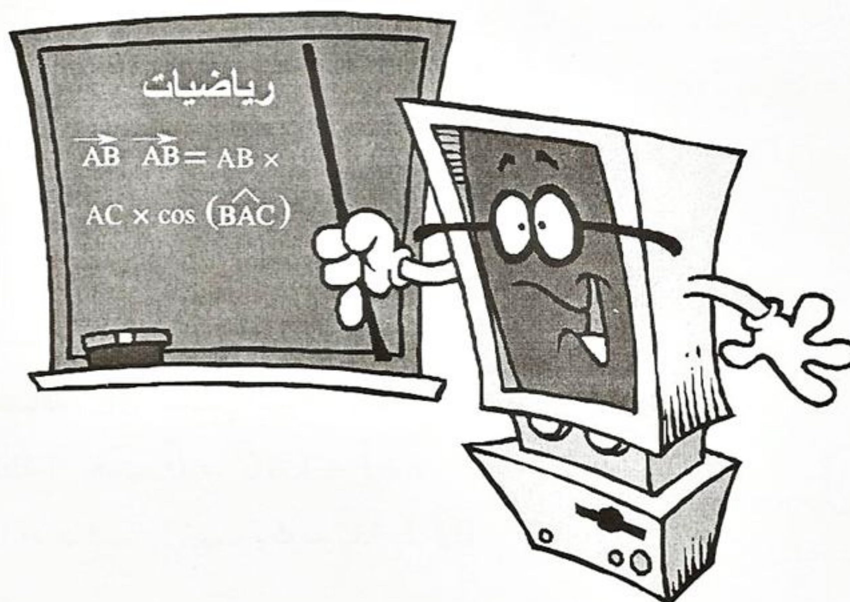
$$BI^2=IH.HA$$

$$IH=\frac{BI^2}{IA}$$

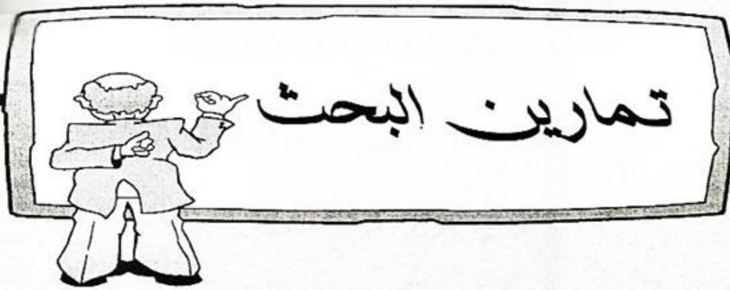
$$=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}$$

$$IH=\frac{3}{2\sqrt{15}}=\frac{3\sqrt{15}}{2\ .\ 15}$$

وبالتالي $IH=\frac{\sqrt{15}}{10}$







تمرين 1 :

ABC مثلث بحيث : 1- $AB = \sqrt{3}$ و $AC = 2$ و $\hat{A} = \frac{2\pi}{3}$

1 - أ – بين أن : $BC = \sqrt{6}$

ب – بين أن : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 3 - \sqrt{3}$

2 - لتكن H المسقط العمودي لــ A على (BC) أحسب المسافة BH

تمرين 2 :

ABCD مربع طول ضلعه يساوي 1

نعتبر النقطتين E و F حيث $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DC}$

1 - أ – بين أن : $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AF} = 1$

ب – استنتج أن : $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{DF}$

2 - أ – أحسب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$

ب – استنتج $\cos E\hat{A}F$

تمرين 3 :

ABC مثلث بحيث :

$AB = 3$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$ و $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$

I منتصف [AB]. المسقط العمودي لــ C على (AB).

1 - أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2 - بين أن $AH = 2$

3 - أحسب المسافة AC

4 - أحسب المسافة BC استنتج المسافة CI

5 - لتكن النقطة J بحيث $8\overrightarrow{AJ} + k\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

حيث $k \in \mathbb{R}$ حدد قيمة k بحيث يكون $\overrightarrow{BJ} \perp \overrightarrow{AC}$



تمرين 4 :

نعتبر مثلثا ABC بحيث قياس الزاوية $A\hat{B}C$ هو $\frac{2\pi}{3}$ و $AB = 1$ و $BC = 2$

1 - بين $AC = \sqrt{7}$

2 - لتكن النقطة I منتصف [BC]

بين أن $AI = \sqrt{3}$

3 - أ - $\cos I\hat{A}C = \frac{9}{2\sqrt{21}}$

ب - استنتج قيمة $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$

ج - لتكن H المسقط العمودي لـ I على المستقيم (AC) أحسب المسافة AH

تمرين 5 :

ABCD متوازي أضلاع حيث :

$AD = 5$ و $CD = 8$ و $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$ وI منتصف القطعة [AB]

1 - أحسب المسافتين BD و AC

2 - حدد مجموعة النقط M من المستوى (P) بحيث : $MA^2 + MB^2 = 40$

تمرين 6 :

ABC مثلث بحيث :

$BC = 2$ و $AC = \sqrt{3}$ و $\hat{C} = \frac{\pi}{6}$

1 - أحسب AB وحدد قياسا للزاوية $\hat{A}$

2 - نعتبر النقطة H المسقط العمودي لـ A على (BC)

بين أن $AH^2 + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CH} = \vec{0}$

3 - أ - أحسب CH و BH

ب - استنتج أن $3\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$

ج - بين أن لكل نقطة M من المستوى (P) لدينا : $3\,MB^2 + MC^2 = 4\,HM^2 + 3$

4 - أوجد مجموعة النقط M من المستوى (P) بحيث

$3\,MB^2 + MC^2 = 6$

تمرين 7 :

ABC مثلث بحيث : $CA = CB = 1$ و $AB = \sqrt{3}$



1 - أ – بين أن

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = AB^2$$

ب – استنتج أن :

$$\cos B\hat{A}C + \cos A\hat{B}C = \sqrt{3}$$

ج – حدد قياسا للزاوية $A\hat{B}C$

2 - لتكن I منتصف $[AC]$.

أ – أحسب BI

ب – استنتج قيمة $\cos B\hat{I}A$

تمرين 8 :

ليكن ABC مثلثا حيث :

$AB = 4$ و $BC = 4\sqrt{7}$ و $B\hat{A}C = \frac{\pi}{3}$

1 - بين أن $AC = 12$

2 - لتكن النقطة D بحيث : $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

أ – أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

ب – استنتج أن : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BD}$

3 - لتكن النقطة E منتصف $[AB]$

بين أن : $DE = 2\sqrt{13}$

تمرين 9 :

ABC مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A بحيث $AB = 1$

لتكن النقطة I منتصف $[AB]$ والنقطة D حيث

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

1 - أ – تحقق أن :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

ب – بين أن $\overrightarrow{CI} \perp \overrightarrow{AD}$

2 - أ – باستعمال مبرهنة الكاشي بين أن :

$$DI = \frac{\sqrt{5}}{6}$$



ب – أحسب $\cos(\widehat{\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IB}})$

تمرين 10 :

ABCD مربع طول ضلعه 1 ومركزه O و I منتصف [BC]

ننشئ داخله النقطة E بحيث يكون المثلث BCE متساوي الأضلاع.

1 - بين أن $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OE} = -OI . OE$ واستنتج أن $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OE} = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$

2 - بين أن $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BE} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$

3 - استنتج $\cos(\frac{\pi}{12})$

تمرين 11 :

ABC مثلث متساوي الأضلاع بحيث $AB = a$

$(a > 0)$ لتكن I منتصف [BC] و O منتصف [AI]

1 - أحسب بدلالة a كلا من الجداء السلمي $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{OC}$ والمسافة AI.

2 - بين أنه لكل نقطة M من المستوى (P) لدينا

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MO^2 + \frac{5}{4}a^2$$

(يمكن استعمال مبرهنة المتوسط)

3 - حدد (E) مجموعة النقط M من المستوى بحيث $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$



الهندسة الفضائية

- عدد الصفحات : [29]
- عدد التمارين : [22]
- عدد تمارين البحث : [09]



10 الهندسة الفضائية

1 ـ موضوعات الهندسة الفضائية :

1- نقطتين مختلفتين A و B تحددان مستقيما وحيدا (AB).

2- ثلاث نقط غير مستقيمية A و B و C تحدد مستوى وحيدا (ABC)

3- إذا انتمت نقطتين مختلفتين من مستقيم (D) إلى مستوى (P) فإن المستقيم (D) يوجد ضمن المستوى (P).

ملاحظة :

– نقول إن عدة نقط مستقيمية إذا كانت تنتمي إلى نفس المستقيم .

– نقول إن عدة نقط مستوائية إذا كانت تنتمي إلى نفس المستوى .

2 ـ تحديد المستوى :

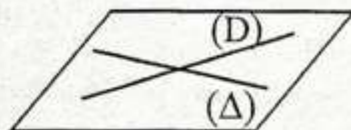
يحدد المستوى في الفضاء بـ :

– ثلاث نقط غير مستقيمية

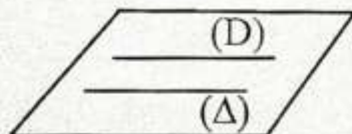
– مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه



– مستقيمين متقاطعين



– مستقيمين متوازيين قطعا

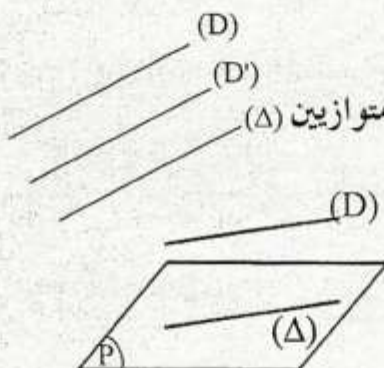


3 ـ التوازي :

1 - إذا وازى مستقيمان مستقيما ثالثا في الفضاء فإنهما يكونان متوازيين

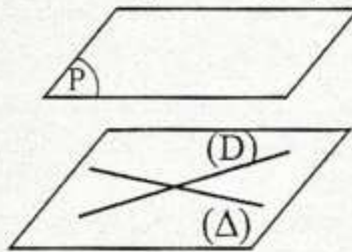
- 2

يكون المستقيم (D) موازي لمستوى (P) إذا وفقط إذا كان يوازي مستقيما (Δ) يوجد ضمن (P).

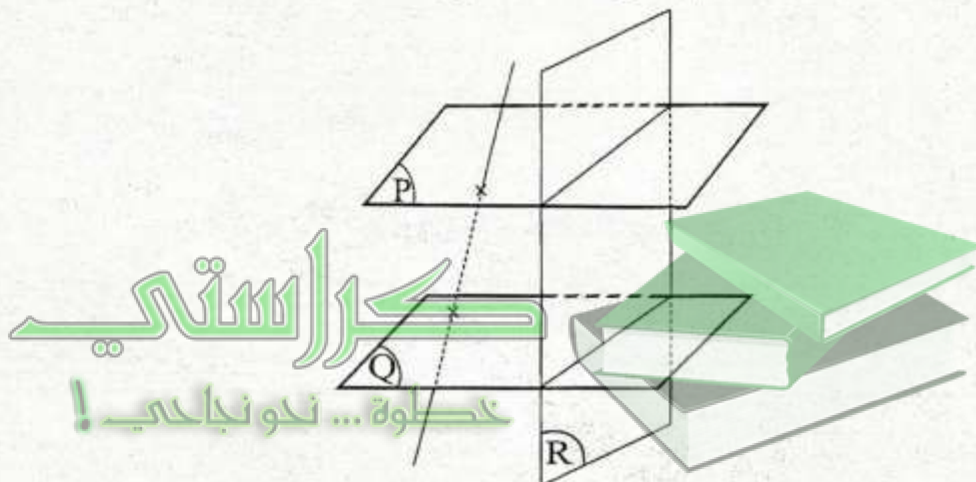




3 - يكون مستويان متوازيين إذا وجد ضمن أحدهما مستقيمان متقاطعان ومتوازيان للأخر

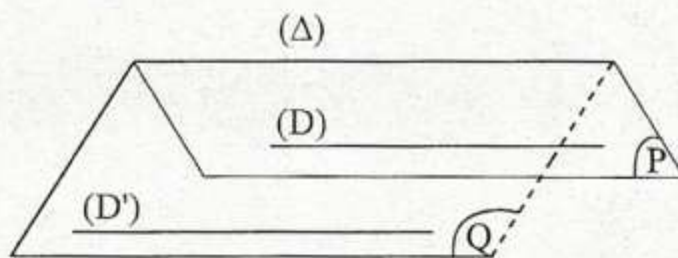


4 - إذا توازى مستويان فإن كل مستوى يقطع أحدهما يقطع الآخر ويكون مستقيما تقاطعه معهما متوازيان وأن كل مستقيم يقطع أحدهما يقطع الآخر.

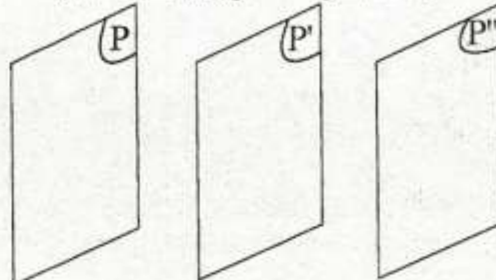


5 - مبرهنة السقف :

إذا تضمن مستويان متقاطعان مستقيمين متوازيين قطعا فإن تقاطعهما يكون مستقيما موازيا لهذين المستقيمين.



6 - إذا وازى مستويان مستوى ثالث فإنهما يكونان متوازيين فيما بينهما.

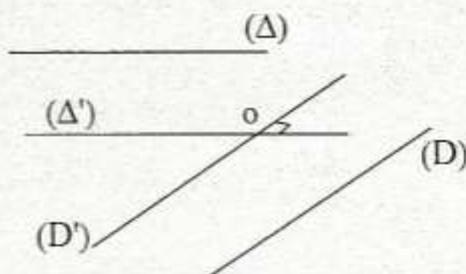


4 ـ التعامد :

1 – تعامد مستقيمين :

تعريف :

نقول إن مستقيما (D) متعامد مع مستقيم (Δ) إذا كان الموازي لــ (D) المار من نقطة O عمودي على الموازي لــ (Δ) المار منO.

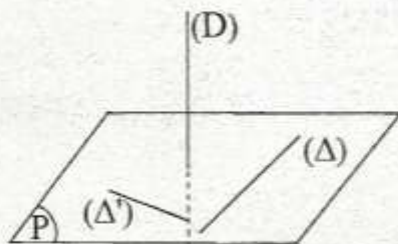


خاصية : مستقيمان متوازيان كل مستقيم عمودي على أحدهما يكون عمودي على الآخر .

2 – تعامد مستقيم ومستوى :

تعريف : يكون المستقيم (D) عمودي على مستوى (P) إذا كان (D) عموديا على جميع مستقيمات المستوى (P).

خاصية : يكون المستقيم (D) عمودي على مستوى (P) إذا كان (D) عموديا على مستقيمين متقاطعين ضمن (P).



خاصية : إذا توازى مستويان فإن كل مستقيم عمودي على أحدهما يكون عمودي على الآخر .

إذا توازى مستقيمان فإن كل مستوى عمودي على أحدهما يكون عمودي على الآخر.

خاصية :

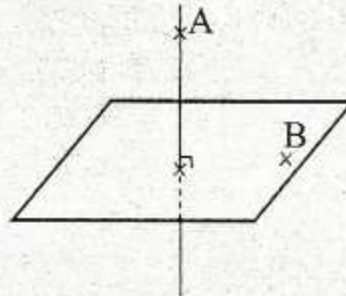
- مستويان عموديان على نفس المستقيم هما مستويان متوازيان.



- مستويان عموديان على نفس المستوى هما مستويان متوازيان.

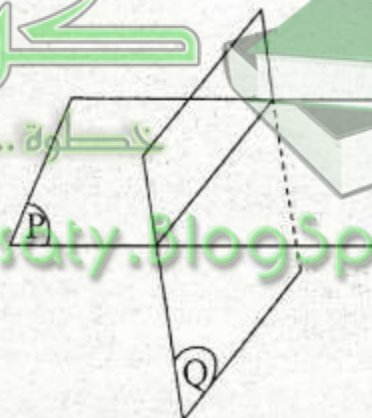
خاصية :

- من نقطة معلومة يمر مستقيم وحيد عمودي على مستوى معلوم.
- من نقطة معلومة يمر مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم.



3 – تعامد بين :

تعريف : يكون مستويان متعامدين إذا اشتمل أحدهما على مستقيم عمودي على المستوى الآخر.

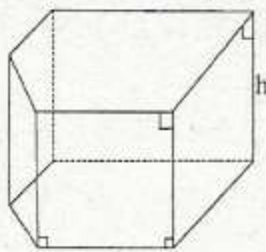




حساب المساحات والحجوم

1ـ الموشور القائم Le prisme droit

ليكن h محيط قاعدة المشور l و B محيط ومساحة قاعدته على التوالي.

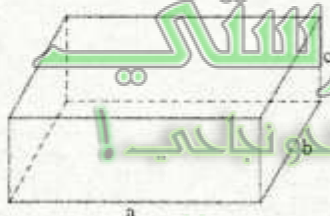


(الشكل 1)

المساحة الجانبية :	$S_L = l.h$
المساحة الكلية :	$S_T = l.h + 2B$
الحجم :	$V = B.h$

1 – متوازي المستطيلات Le parallélépipède

ليكن a و b و c على التوالي طول وعرض وارتفاع متوازي المستطيلات.

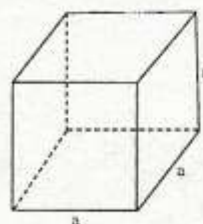


(الشكل 2)

المساحة الجانبية	$S_L = 2c(a+b).c$
المساحة الكلية	$S_T = 2c(a+b) + 2ab$
الحجم	$V = a.b.c$

2 – المكعب Le cube

a طول حرف المكعب



(الشكل 3)

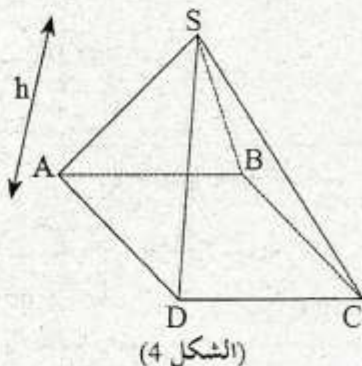
المساحة الجانبية	$S_L = 4a^2$
المساحة الكلية	$S_T = 6a^2$
الحجم	$V = a^3$

2 ـ الهرم La pyramide

SABCD هرم رأسه S وقاعدته ABCD.

ارتفاع الهرم هو المسافة بين S والمستوى ABCD. أي أن $h = SH$

حيث H المسقط العمودي للنقطة على المستوى (ABC) .



(الشكل 4)

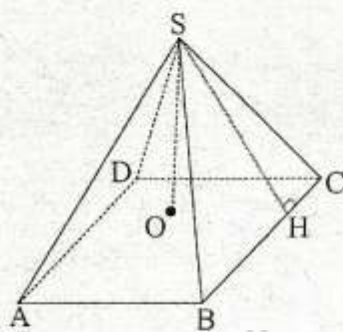
إذا كانت B هي مساحة القاعدة و h هو ارتفاع الهرم فإن الحجم هو :

$$V = \frac{1}{3} B . h$$

الهرم المنتظم L a pyramide régulière

إذا كانت القاعدة على شكل مضلع منتظم والمسقط العمودي للرأس هو مركز المضلع فإن الهرم يسمى هرما منتظما.

في هذه الحالة يكون لجميع الأوجه المثلثية نفس الارتفاع SH ويسمى عامد الهرم.



(الشكل 5)

$c = SH$

المساحة الجانبية لهرم منتظم هي :

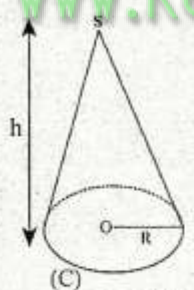
$$S_L = \frac{1}{2} l . c$$

l محيط القاعدة و c عامد الهرم.

3 ـ المخروط Le cône

S رأس المخروط والدائرة (C) قاعدة.

ارتفاع المخروط هو المسافة رأسه عن المستوى المحدد بالقاعدة.



(الشكل 6)

حجم المخروط ارتفاعه h وقاعدته دائرة شعاعها R هو :

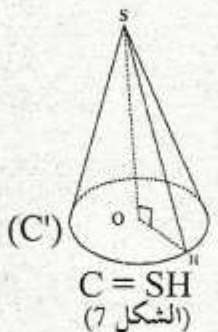
$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

المخروط الدوراني L e cône de révolution

إذا كان المسقط العمودي لرأس المخروط هو مركز القاعدة فإن هذا المخروط يسمى مخروطا دورانيا.

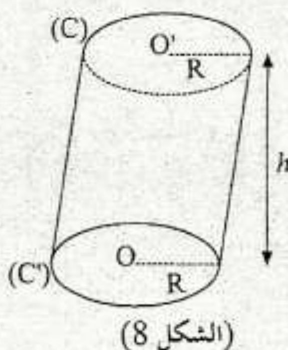
المساحة الجانبية هي : $S_L = \pi R c$

حيث c هي مسافة الرأس عن نقطة من الدائرة (C).



(الشكل 7)

4 ـ الاسطوانة   L e cylindre

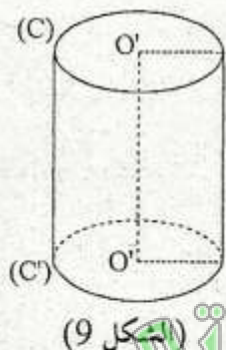


(الشكل 8)

حجم اسطوانة ارتفاعها h وقاعدتها
قرص شعاعه R هو :
$V = \pi R^2 h$

الأسطوانة القائمة   L e cylindre droit

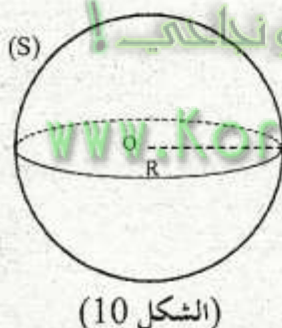
إذا كان المستقيم المار من مركزي (C) و(C') عموديا على المستويين المحددين بهاتين القاعدتين فإن الأسطوانة تسمى أسطوانة قائمة.



(الشكل 9)

المساحة الجانبية لأسطوانة قائمة هي : $S_L = 2\pi Rh$

5 ـ الفلكة   L a sphère



(الشكل 10)

مساحة الفلكة التي شعاعها R هي :
$S = 4\pi R^2$
حجم الفلكة التي شعاعها R هي :
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

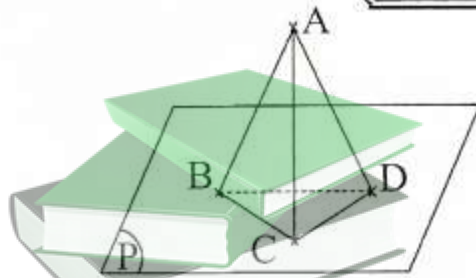
تمارين وحلولها

تمرين 1 :

(P) مستوى في الفضاء ($\mathscr{E}$) حيث B و C و D ثلاث نقط غير مستقيمية من (P) و $A \notin (P)$

أنشئ الشكل ثم حدد المستويات الموجودة في الشكل.

الجواب :



وبماأن B و C و D من المستوى (P) و $A \notin (P)$

فإن النقط A و B و C و D غير مستوائية

إذن A و B و C و D تحدد رباعي الاوجه.

لدينا أربع مستويات وهي :

(ABC) و (ABD) و (ACD) و (BCD)

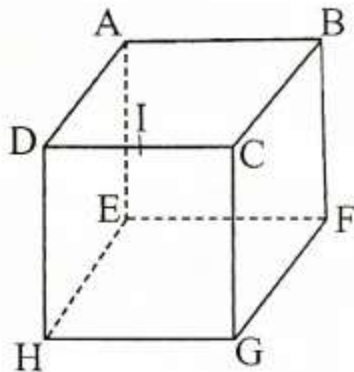
تمرين 2 :

ABCDEFGH مكعبا و I منتصف القطعة [DC]

1 - هل النقطة I تنتمي إلى المستوى (ABC)؟ علل جوابك

2 - بين أن النقط E و H و C و B مستوائية

الجواب :



1 - لدينا ABCD مربع إذن $(AB)/\!/(DC)$

ومنه A و B و C و D مستوائية

إذن $(DC) \subset (ABC)$

وبما أن $I \in [DC]$ فإن $I \in (ABC)$

2 - لدينا $(BC)/\!/(AD)$ لأن ABCD مربع

و $(EH)/\!/(AD)$ لأن ADHE مربع

إذن $(BC)/\!/(EH)$

ومنه النقط E و H و C و B مستوائية

تمرين 3 :

نعتبر متوازي المستطيلات القائم حيث قياسات أضلاعه هي على التوالي : 1cm، 2cm، 3cm

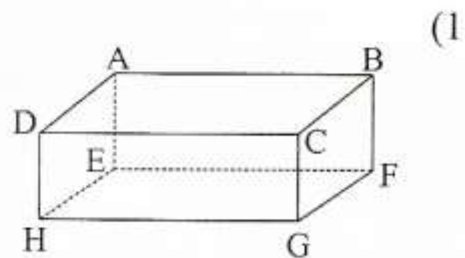
1) - ما هو قياس قطر متوازي المستطيلات ؟

2) - ما هو ضلع مكعب حيث قطر هذا المكعب يساوي قطر متوازي المستطيلات السابق.



الجواب :

(1



لدينا AG قطر متوازي المستطيلات

لدينا حسب مبرهنة فيثاغورس :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 3^2 + 1^2$

$= 10$

$AC^2 = 10$

لدينا كذلك حسب مبرهنة فيثاغورس :

$AG^2 = AC^2 + CG^2$

$= 10 + 2^2$

$= 14$

إذن : $AG = \sqrt{14}$

2) ليكن a ضلع المكعب

إذن قطر المكعب هو : $a\sqrt{3}$

لدينا : $a\sqrt{3} = \sqrt{14}$

إذن $a = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}$

$a = \frac{\sqrt{42}}{3}$

إذن ضلع المكعب هو : $\frac{\sqrt{42}}{3}$ cm

تمرين 4 :

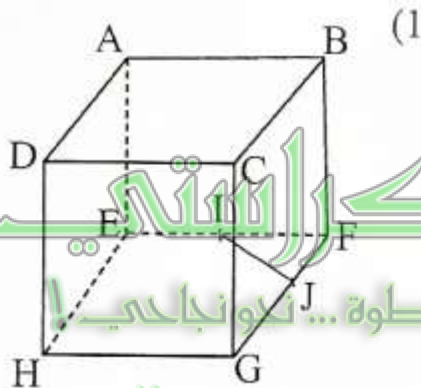
نعتبر ABCDEFGH مكعبا و I منتصف القطعة [EF] و J منتصف القطعة [FG]

1) - هل النقط I و J و F و D مستوائية ؟ (علل جوابك).

2) - بين أن النقط A و C و G و E مستوائية

الجواب :

(1



لدينا $I \in (EF)$ و $J \in (FG)$

إذن النقطتان I و J تنتميان إلى المستوى (EFGH)

ولدينا $D \notin (EFGH)$

إذن النقط I و J و F و D غير مستوائية

2) لدينا $(AE) // (BF)$

و $(BF) // (CG)$

إذن $(AE) // (CG)$ ①

ولدينا $AE = BF$

و $CG = BF$

إذن $AE = CG$ ②



من ① و ② نستنتج أن ACGE متوازي الاضلاع

ومنه $(AC)//(EG)$

إذن النقط A و C و G و E مستوائية.

تمرين 5 :

ليكن ABCD رباعي أوجه

I و J و K نقط من [AB] و [AC] و [AD] على التوالي بحيث

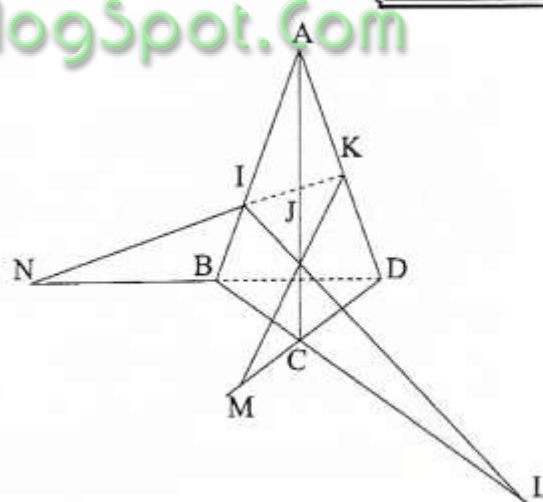
(IJ) يقطع (BC) في L

(JK) يقطع (CD) في M

(IK) يقطع (BD) في N

1 - بين أن النقط L و M و N مستقيمية

الجواب :



نعتبر المستويين (IJK) و (BCD)

لدينا $(IJK) \neq (BCD)$

و $\begin{cases} L \in (IJ) \\ (IJ) \subset (IJK) \end{cases}$ اذن $L \in (IJK)$

$\begin{cases} L \in (BC) \\ (BC) \subset (BCD) \end{cases}$ اذن $L \in (BCD)$

إذن(ILK) و (BCD) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) يمر من L

كذلك لدينا

$\begin{cases} M \in (JK) \\ (JK) \subset (IJK) \end{cases}$ اذن $M \in (IJK)$

$\begin{cases} M \in (CD) \\ (CD) \subset (BCD) \end{cases}$ اذن $M \in (BCD)$

ومنه $M \in (IJK) \cap (BCD) = (\Delta)$

كذلك لدينا

$\begin{cases} N \in (IK) \\ (IK) \subset (IJK) \end{cases}$ اذن $N \in (IJK)$

$\begin{cases} N \in (BD) \\ (BD) \subset (BCD) \end{cases}$ اذن $N \in (BCD)$

ومنه $N \in (IJK) \cap (BCD) = (\Delta)$

ومنه L و M و N تنتمي إلى نفس المستقيم (Δ)

وبالتالي L ، M ، N نقط مستقيمية

تمرين 6 :

ليكن SABCD هرما قاعدته ABCD شبه منحرف حيث (CD) يوازي (AB)

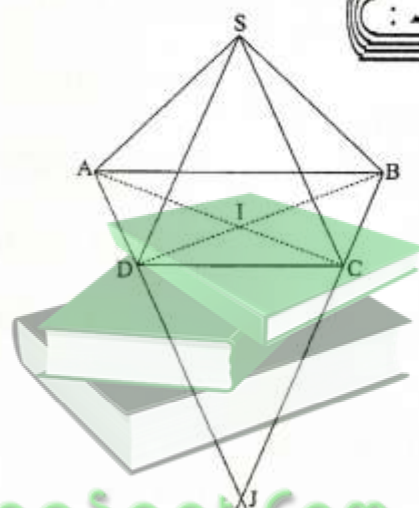
1 - حدد (Δ) تقاطع المستويين (SAC) و (SBD)

2 - حدد (Δ') تقاطع المستويين (SAB) و (SCD)

3 - حدد (Δ'') تقاطع المستويين (SAB) و (SCD)

الجواب :

①



لدينا $B \in (SBD)$ و $B \notin (SAC)$

اذن $(SAC) \neq (SBD)$ ①

لدينا $S \in (SBD)$ و $S \in (SAC)$

إذن $S \in (SAC) \cap (SBD)$ ②

لتكن I نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و (BD)

لدينا : $I \in (AC)$ و $(AC) \subset (SAC)$

فإن $I \in (SAC)$

لدينا $I \in (BD)$ و $(BD) \subset (SBD)$

اذن $I \in (SBD)$

ومنه $I \in (SAC) \cap (SBD)$ ③

إذن من ① و② و③ نستنتج أن

$(SAC) \cap (SBD) = (SI)$

② لدينا $A \in (SAB)$ و $A \notin (SCD)$

اذن $(SAB) \neq (SAD)$

لدينا $S \in (SAB) \cap (SCD)$

لدينا $(SCD) \cap (SAB) = (\Delta')$

و $(AB) // (AC)$

و$(AB) \subset (SAB)$ و $(CD) \subset (SCD)$

إذن : (Δ') هو المستقيم المار من S والموازي لـ (AB) و (CD)

③ لدينا $A \in (SAD)$ و $A \notin (SBC)$

اذن $(SBC) \neq (SAD)$ ①

لدينا كذلك $S \in (SBC) \cap (SAD)$ ②

لتكن J نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و(BC)

إذن $J \in (AD)$ و $J \in (BC)$

ومنه $J \in (SAD)$ و $J \in (SBC)$

إذن $J \in (SBC) \cap (SAD)$ ③

من ① و② و③ نستنتج أن

$(SBC) \cap (SAD) = (SJ)$

تمرين 7 :

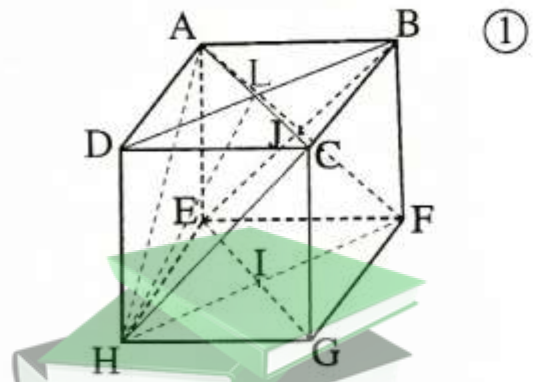
ABCDEFGH مكعبا في الفضاء

1 - حدد وانشئ المستقيم (Δ) تقاطع المستوين (ACH) و (BDF).

2 - ليكن I و J مركزا المربعين EFGH وABFE على التوالي
حدد المستقيم ('Δ) تقاطع المستويين (IJE) و (ADH).

الجواب :

①



لدينا $A \in (ACH)$ و $A \notin (BDF)$

اذن $(ACH) \neq (BDF)$ ①

لدينا $H \in (ACH)$

بما أن $\begin{cases} DH = BF \\ (DH) \parallel (BF) \end{cases}$ فإن

الرباعي BDHF متوازي الاضلاع

ومنه B وD وH وF مستوائية

إذن $H \in (BDF)$

ومنه $H \in (BDF) \cap (ACH)$ ②

لتكن L نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و(BD)

إذن $L \in (ACH)$ و $L \in (BDF)$

ومنه $L \in (BDF) \cap (ACH)$ ③

إذن من ① و② و③ نستنتج أن

$(BDF) \cap (ACH) = (HL)$

② لدينا $I \in (IJE)$ و $I \notin (ADH)$

اذن $(IJE) \neq (ADH)$

لدينا $E \in (IJE)$ و $E \in (ADH)$

لأن : $(DH) \parallel (AE)$

إذن : $E \in (ADH) \cap (IJE)$

لدينا $\begin{cases} AB = HG \\ (AB) \parallel (HG) \end{cases}$ إذن

ABGH متوازي الأضلاع

ومنه $(AH) \parallel (BG)$

نعتبر المثلث EBG

لدينا I منتصف [EG]

J منتصف [AB]

إذن $(IJ) \parallel (BG)$

وبالتالي $(IJ) \parallel (AH)$

لدينا $\begin{cases} (IJ) \parallel (AH) \\ (IJ) \subset (IJE) \\ (AH) \subset (ADH) \\ (ADH) \cap (EJE) = (\Delta') \end{cases}$

إذن ('Δ) هو المستقيم المار من E والموازي لـ (IJ) و(AH) .

تمرين 8 :

ABCD رباعي الاوجه . E و F منتصفا القطعتين [AB] و[DC] على التوالي و G مركز

ثقل المثلث ADC .

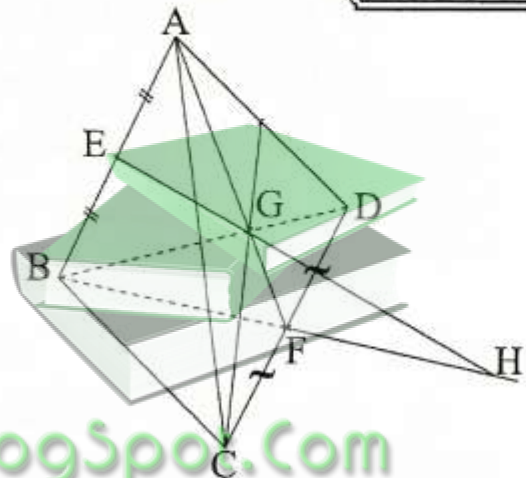
1 - أ - بين ان : (EG) و (BF) مستوائيان

-ب- بين ان : (EG) و(BF) متقاطعان في نقطة H .

-ج- استنتج تقاطع (EG) والمستوى (BCD) .

2 - حدد تقاطع المستوين (DEG) و(ABC)

الجواب :



1 - أ - نعتبر المستوى (ABF)

لدينا $E \in (AB)$ إذن $E \in (ABF)$

لدينا $G \in (AF)$ إذن $G \in (ABF)$

ومنه $(EG) \subset (ABF)$

ولدينا $(BF) \subset (ABF)$

إذن (EG) و (BF) مستوائيان

ب - نفترض أن : $(EG) // (BF)$

لدينا $\frac{EA}{BA} = \frac{1}{2}$

ولدينا $\frac{AG}{AF} = \frac{2}{3}$

بما أن $(EG) // (BF)$ فإن

حسب خاصية طاليس المباشرة :

$$\frac{EA}{BA} = \frac{AG}{AF}$$

أي أن $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ وهذا تناقض

إذن الافتراض خاطئ

ومنه (EG) و(BF) متقاطعان لأنهما مستوائيان .

ج- لدينا $(BF) \subset (BCD)$

و $H \in (BF)$

إذن $H \in (BCD)$

ولدينا $H \in (EG)$

إذن $H \in (EG) \cap (BCD)$

ولدينا $E \in (EG)$ و $E \notin (BCD)$

إذن تقاطع المستقيم (EG) والمستوى (BCD) هو النقطة H .

إذن : $(EG) \cap (BCD) = \{H\}$

2 - تحديد تقاطع المستوين (DEG) و(ABC)

لدينا $A \in (ABC)$ و $A \notin (DEG)$

اذن $(DEG) \neq (ABC)$ ①

لدينا $E \in (DEG)$ و $E \in (AB)$

إذن $E \in (ABC)$

إذن $E \in (ABC) \cap (DEG)$ ②

لتكن L منتصف القطعة [AC]

إذن $L \in (ABC)$

لأن $L \in (AC)$

لدينا (DL) متوسط في المثلث ACD

إذن G مركز ثقل المثلث ADC تنتمي إلى (DL).

ومنه $L \in (DL)$

وبالتالي $L \in (EDG)$

إذن $L \in (ABC) \cap (EDG)$ ③

إذن من ① و② و③ نستنتج أن

$(ABC) \cap (EDG) = (EL)$

تمرين 9 :

نعتبر $SABCD$ هرما قاعدته المستطيل $ABCD$

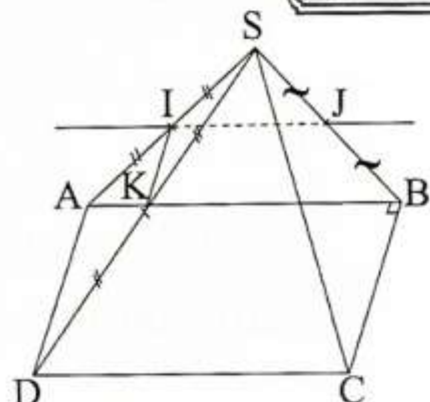
I و J و K منتصفات القطع $[SA]$ و$[SB]$ و$[SD]$ على التوالي.

1 - بين ان : (IJ) يوازي (SDC)

2 - بين ان : (IK) يوازي (SBC)

3 - بين ان : $(ABC) // (IJK)$

الجواب :



1 - نعتبر المثلث SAB

لدينا I منتصف $[AS]$

J منتصف $[BS]$

إذن $(IJ) // (AB)$

لدينا $ABCD$ مستطيل إذن

$(AB) // (DC)$

ومنه $(IJ) // (DC)$

وبما أن $(DC) \subset (SDC)$

فإن $(IJ) // (SDC)$

2 - نعتبر المثلث SAD

لدينا I منتصف $[AS]$

K منتصف $[DS]$

إذن $(IK) // (AD)$

لدينا $ABCD$ مستطيل ومنه

$(AD) // (BC)$

وبالتالي $(BC) // (IK)$

وبما أن $(BC) \subset (SBC)$

فإن $(IK) // (SBC)$

لدينا (AB) و (AD) متقاطعان وضمن المستوى (ABC)

ولدينا $(IJ) // (AB)$ و $(IK) // (AD)$

و(IJ) و(IK) متقاطعان وضمن المستوى (IJK).

إذن $(IJK) // (ABC)$



تمرين 10 :

ليكن ABCDEFGH متوازي المستطيلات

1 - بين ان B و C و H و E نقط مستوائية.

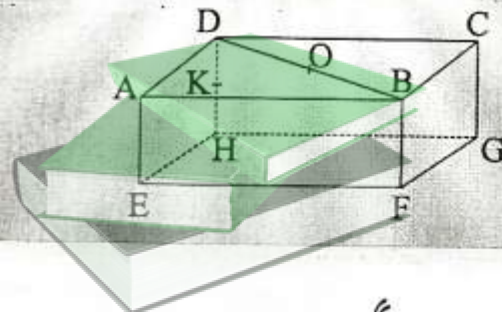
2 - بين ان : (BE) // (HC)

3 - لتكن O منتصف [BD] و K منتصف [DH]

بين ان : (OK) // (BCH)

4 - علما أن AB = 4 و AD = 3 و AE = 2

احسب حجم متوازي المستطيلات ABCDEFGH.



الجواب :

1 - لدينا (FG) // (BC) لأن BCGF متوازي أضلاع.

كذلك (EH) // (FG) لأن EFGH متوازي أضلاع.

ومنه (EH) // (BC)

وبالتالي (EH) و (HC) مستقيمان مستوائيان

إذن B و C و H و E نقط مستوائية.

2 - لدينا (BC) // (EH) و EH = BC

إذن BCHE متوازي أضلاع.

ومنه (HC) // (BE)

3 - في المثلث DBH لدينا :

O منتصف [BD]

K منتصف [DH]

إذن (OK) // (BH)

ولدينا (BH) ⊂ (BCH)

وبالتالي (OK) // (BCH)

4 - حجم متوازي المستطيلات هو :

$V = AB \cdot AD \cdot AE$

$= 2 \times 3 \times 4 = 24$

تمرين 11 :

ليكن في الفضاء ABCD و ABEF متوازيا اضلاع لا يوجدان ضمن نفس المستوى.

1 - بين ان (ADF) // (BCE)

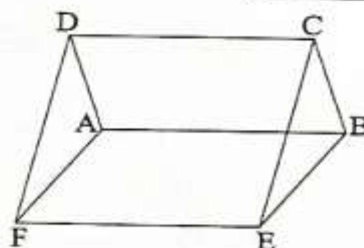
2 - أ - بين ان النقط E و F و C و D مستوائية

ب - بين أن (EC) يوازي (DF)

ج - استنتج طبيعة الرباعي CDEF

3 - حدد تقاطع المستويين (ACE) و (ADF)

الجواب :



1 - ABCD متوازي الاضلاع

إذن (AD) // (BC)



لدينا ABEF متوازي الاضلاع

إذن $(AF) // (BE)$

لدينا (AD) و (AF) متقاطعان وضمن

المستوى (ADF) .

لدينا كذلك (BC) و (BE) متقاطعان وضمن

المستوى (BCE)

إذن $(ADF) // (BCE)$

2 - أ -

لدينا ABCD متوازي الاضلاع

إذن $(DC) // (AB)$

لدينا ABEF متوازي الاضلاع

إذن $(EF) // (AB)$

ومنه $(EF) // (DC)$

إذن النقط E و F و C و D مستوائية

ب -

لدينا $(ADF) // (BCE)$

و $(EFDC) \cap (ADF) = (DF)$

$(EFDC) \cap (BCE) = (EC)$

ومنه : $(EC) // (DF)$

حسب الخاصية " إذا توازى مستويان فإن كل مستوى ثالث يقطع أحدهما فهو يقطع الآخر وفق مستقيمين متوازيين "

ج- لدينا $(DC)//(EF)$ و $(EC)//(DF)$ إذن الرباعي CDEF متوازي الاضلاع

3 - لدينا $C \in (ACE)$

و $C \notin (ADF)$

اذن $(ACE) \neq (ADF)$

لدينا $A \in (ACE) \cap (ADF)$

لنضع : $(ACE) \cap (ADF) = (\Delta)$

ولدينا : $(FD) \subset (ADF)$

$(CE) \subset (ACE)$

و $(FD) // (CE)$

إذن (Δ) هو المستقيم المار من A والموازي لـ (CE) و (FD)

إذن تقاطع المستويين (ACE) و (ADF) هو المستقيم المار من A والموازي لـ (CE) و (FD).

تمرين 12

ليكن ABCDEFGH مكعبا والنقط M و I و N منتصفات القطع [AE] و [BF] و [DH]

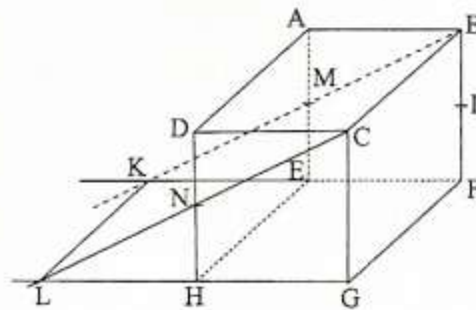
1 - بين أن المستقيم (BA) يقطع المستقيم (EF) في نقطة K وان المستقيم (CN) يقطع المستقيم (GH) في نقطة L.

2 - بين ان : (KL) يوازي (BC)

3 - حدد تقاطع المستويين (ADE) و (IMH)

4 - بين أن المستقيم (IH) يوازي المستوى (KLC)

الجواب :



1 - نعتبر المستوى ABEF

لدينا (AB) و(EF) و(MB) مستوائية

لدينا (AB) // (EF)

و (BM) يقطع (AB) في B

إذن (BM) يقطع (EF) في نقطة K .

نعتبر المستوى :DCGH

لدينا (DC) و(HG) و(CN) مستوائية

لدينا (DC) // (HG)

(CN) يقطع (DC) في C

إذن (CN) يقطع (HG) في نقطة L

2 - النقط B و C و N و L و K و M مستوائية

لدينا (ABCD) // (EFGH)

و (ABCD) ∩ (BCLK) = (BC)

(EFGH) ∩ (BCLK) = (KL)

إذن (BC) // (KL)

3 - لدينا A∈ (ADE) و A ∉ (IMH)

إذن (IMH) ≠ (ADE) ①

لدينا M منتصف [AE] إذن M∈ (ADE)

ولدينا M∈ (AMH)

إذن M∈ (ADE) ∩ (IMH) ②

لدينا (DH) // (AE) إذن H∈ (ADE)

و H∈ (IMH)

إذن H∈ (ADE) ∩ (IMH) ③

إذن من ① و② و③ نستنتج أن

(ADE) ∩ (IMH) = (MH)

4 - لدينا (BI) // (NH) و BI = NH

إذن الرباعي BNHI متوازي الأضلاع

ومنه (IH) // (NB)

وبما أن (NB) ⊂ (KLC)

فإن (IH) // (KLC)

تمرين 13 :

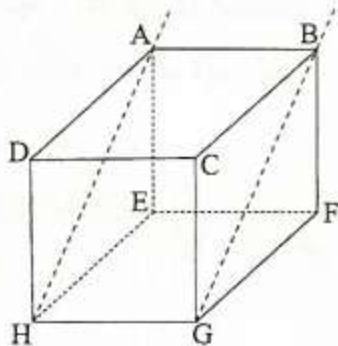
ليكن ABCDEFGH مكعبا

1 - بين أن (HG) ⊥ (BF)

2 - أ - بين أن (AH) // (GB)

ب - استنتج أن : (DE) ⊥ (GB)

الجواب :



1 - لديتا : EFGH مربع

إذن (HG) // (EF)

لدينا : ABEF مربع

إذن (BF) // (AE)

و (AE) ⊥ (EF) في النقطة E

إذن (HG) عمودي على (BF)

2 - أ -

لدينا (HG) // (EF) و (EF) // (AB)

ومنه (HG) // (AB)

لدينا كذلك : HG = EF

و EF = AB

إذن HG = AB

إذن (HG)//(AB) و HG = AB ومنه الرباعي ABGH متوازي الاضلاع

ومنه (AH) // (GB)

ب -

لدينا (AH)⊥(DE) لأنهما قطر المربع ADHE

ولدينا (AH) // (GB)

إذن (DE) ⊥ (GB)

تمرين 14 :

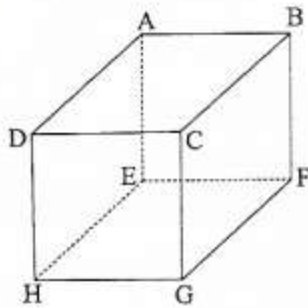
ليكن ABCDEFGH مكعبا في الفضاء

1) - بين أن (ABF) ⊥ (HE)

2) - أ - بين أن (EB) ⊥ (AD)

ب - استنتج أن : (AFG) ⊥ (EB)

الجواب :



1) - لدينا : (HE) ⊥ (AE)

لأن ADHE مربع

(HE) ⊥ (EF)

لأن HEFG مربع

لدينا كذلك :(AE) و(EF) متقاطعان في E

ضمن المستوى (ABF)

ومنه (ABF) ⊥ (HE)

2) - أ - لدينا (ABF) ⊥ (HE)

و (HE) // (AD)

إذن (AD) ⊥ (ABF)

وبما أن (EF) ⊂ (ABF)

فإن (AD) ⊥ (EB)

ب - لدينا (AFG) = (AFGD)

لأن (FG) // (AD)

لدينا : (EB) ⊥ (AD) ①

لدينا : (EB) ⊥ (AF) ②

لأن [AF] و [EB] قطرا المربع ABFE

لدينا (AD) و(AF) متقاطعان في A وضمن

المستوى (AFG) ③

من ① و ② و ③ نستنتج أن

$(AFG) \perp (EB)$

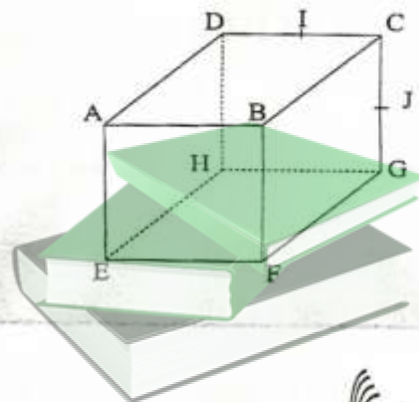
تمرين 15 :

ليكن ABCDEFGH مكعبا.

I منتصف [CD] و J منتصف [CG]

1 - بين أن : $(IJ) // (ABF)$

2 - أثبت أن : $(AD) \perp (IJ)$



الجواب :

1 - في المثلث DCG لدينا I منتصف [DC]

و لدينا J منتصف [CG]

إذن $(DG) // (IJ)$ ①

ولدينا $(BC) // (AD)$ و $(BC) // (FG)$ إذن $(AD) // (FG)$

ولدينا $AD = FG$

إذن الرباعي ADGF متوازي أضلاع

ومنه $(DG) // (AF)$ ②

من ① و ② نستنتج أن $(IJ) // (AF)$

ولدينا $(AF) \subset (ABF)$

وبالتالي : $(IJ) // (ABF)$

2 - لدينا $(AD) \perp (DC)$

$(AD) \perp (DH)$

و (DC) و(DH) متقاطعان ضمن المستوى (HDC)

ومنه $(AD) \perp (HDC)$

ولدينا : $(IJ) \subset (HDC)$

إذن $(AD) \perp (IJ)$

تمرين 16 :

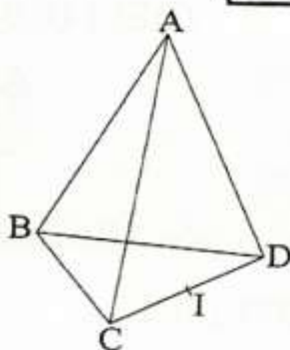
ليكن ABCD رباعي أوجه بحيث :

$AC = AD$ و $BC = BD$، I منتصف [CD]

1 - بين أن : $(CD) \perp (ABI)$

2 - استنتج أن : $(AB) \perp (CD)$

الجواب :



1 - المثلث ACD متساوي الساقين لأن $AC = AD$ رأسه A و I منتصف [CD]

إذن : $(AI) \perp (CD)$ ①

كذلك BCD متساوي الساقين لأن

$BC = BD$ رأسه B و I منتصف [CD]

إذن : $(BI) \perp (CD)$ ②

ولدينا (BI) و(AI) متقاطعان ضمن المستوى (ABI)

ومنه $(CD) \perp (ABI)$

2 - لدينا : $(CD) \perp (ABI)$

و $(AB) \subset (ABI)$

إذن $(CD) \perp (AB)$

تمرين 17 :

ليكن ABCDEFGH مكعبا في الفضاء

1) - بين أن $(AE) \perp (BD)$

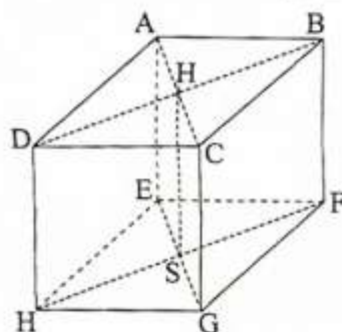
2) - بين أن $(BD) \perp (AEC)$

3) - ليكن S مركز المربع EFGH و $AB = 3\text{ cm}$

احسب حجم الهرم SABCD

4) - بين أن $(BDF) \perp (AEG)$

الجواب :



1) - لدينا : $(AE) \perp (AB)$

لأن ABFE مربع

$(AE) \perp (AD)$

لأن ADHE مربع

و (AB) و(AD) متقاطعان و ضمن المستوى (ABD) إذن $(AE) \perp (ABD)$

وبما أن $(BD) \subset (ABD)$

فإن : $(AE) \perp (BD)$

2) - لدينا : $(AE) \perp (BD)$

لأن ABCD مربع

إذن $(AC) \perp (BD)$

و (AE) و (AC) متقاطعان و ضمن المستوى (ACE)

إذن $(BD) \perp (AEC)$

3) - ليكن H مركز المربع ABCD

إذن SH هو ارتفاع الهرم SABCD

إذن حجم الهرم SABCD هو :

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABCD} \times SH$$

لدينا : $SH = AE$

ومنه $SH = 3\text{ cm}$

لدينا $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 9\text{ cm}^2$

ومنه $V = \frac{1}{3} \times 9 \times 3\text{ cm}^3$

$$\boxed{V = 9\text{ cm}^3}$$

4) - لدينا $(AE) // (CG)$

إذن النقط A و E و C و G مستوائية

ومنه $(AEC) = (AEG)$

لدينا $(BD) \subset (BDF)$

و $(BD) \perp (AEG)$

إذن $(BDF) \perp (AEG)$

تمرين 18 :

ABCD رباعي الاوجه حيث :

$(AB) \perp (BCD)$ و H مركز تعامد المثلث BCD

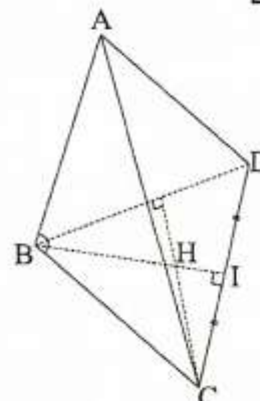
1) أ - بين أن : $(CH) \perp (ABD)$

ب - استنتج أن : $(AD) \perp (CH)$

2) نفترض أن المثلث BCD متساوي الاضلاع حيث $AB = 4cm$ و $CB = 3\ cm$

احسب حجم رباعي الاوجه ABCD.

الجواب :



1) أ - لدينا $(AB) \perp (BCD)$

و $(CH) \subset (BCD)$

إذن $(CH) \perp (AB)$ ①

لدينا H مركز تعامد المثلث BCD

إذن $(CH) \perp (BD)$ ②

(AB) و(BD) متقاطعان و ضمن المستوى (ABD) ③

من ① و② و③ نستنتج أن

$(CH) \perp (ABD)$

ب - لدينا $(CH) \perp (ABD)$

و $(AD) \subset (ABD)$

إذن $(AD) \perp (CH)$

2) المثلث BCD متساوي الاضلاع

إذن (IB) ارتفاع حيث I منتصف [CD]

إذن : $\mathcal{A}_{BCD} = \frac{CD \times BI}{2}$

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة في المثلث BCI القائم الزاوية في I لدينا :

$$IC^2 = BC^2 - CI^2$$

$$= 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= 9 - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{27}{4}$$

إذن : $IC = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

ومنه $\mathcal{A}_{BCD} = \frac{3 \times 3\sqrt{3}}{4}$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{4}\ cm^2$$

نعلم أن حجم رباعي الأوجه ABCD هو :

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \times AB$$

[AB] ارتفاع لأن $(AB) \perp (BCD)$

إذن $V = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{4} \times 4\ cm^3$

$$V = 3\sqrt{3}\ cm^3$$

تمرين 19 :

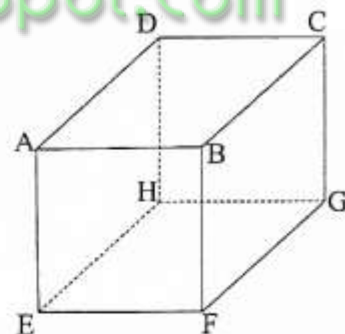
ليكن ABCDEFGH مكعب

1) - بين أن $(FC) \perp (AH)$

2) - بين أن $(FC) \perp (ABG)$

3) - استنتج أن : $(EFC) \perp (ABG)$

الجواب :



1) - لدينا BCGF مربع

إذن قطراه متعامدان

ومنه ① $(BG) \perp (FC)$

ولدينا $\begin{cases} (AB) // (DC) \\ (DC) // (HG) \end{cases}$ إذن $(AB) // (AH)$

ولدينا AB = HG ومنه ABGH متوازي اضلاع

وبالتالي ② $(BG) // (AH)$

إذن لدينا : $(AH) // (BG)$

$(BG) \perp (FC)$

ومنه $(FC) \perp (AH)$

2) - لدينا : $(FC) \perp (BG)$

لدينا $(AB) \perp (BC)$

$(AB) \perp (BF)$

و(BC) و(BF) متقاطعان ضمن (BCF)

إذن $(AB) \perp (BCF)$

ولدينا $(FC) \subset (BCF)$

إذن $(AB) \perp (FC)$

إذن $(FC) \perp (AB)$

$(FC) \perp (BG)$

و(AB) و(BG) متقاطعان ضمن (ABG)

وبالتالي ③ $(FC) \perp (ABG)$

3) - لدينا : $(FC) \perp (ABG)$

و $(FC) \subset (EFC)$

ومنه $(EFC) \perp (ABG)$

تمرين 20 :

ليكن ABCD رباعي الأوجه بحيث :

$(AB) \perp (BCD)$

(CC') و(AA') ارتفاعان للمثلث ACD

و(CC") ارتفاع في المثلث BCD .

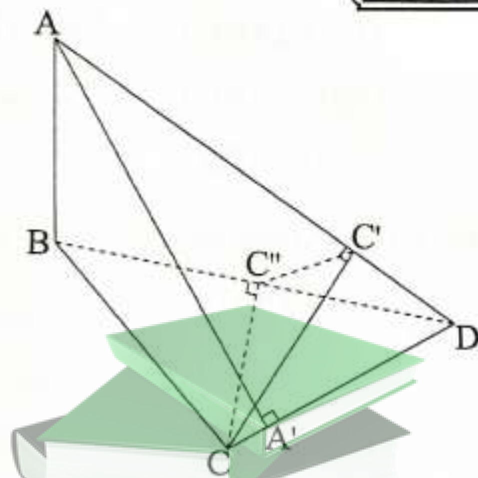
1 - انشئ الشكل.

2 - بين أن (BA') ارتفاع في المثلث BCD

3 - بين أن : $(AD) \perp (CC'C")$

الجواب :

- 1



2- لدينا $(AB)\perp(BCD)$ و $(CD)\subset(BCD)$ إذن $(AB)\perp(CD)$ ①

(AA') ارتفاع في المثلث ACD

إذن : $(AA')\perp(CD)$ ②

ولدينا (AB) و(AA') متقاطعان ضمن (AA'B).

إذن من ① و② نستنتج أن

$(CD) \perp (AA'B)$

و لدينا $(A'B) \subset (AA'B)$

إذن $(CD) \perp (A'B)$

وبالتالي : (BA') ارتفاع في المثلث BCD.

3 - لدينا $(CC") \perp (BD)$

لدينا $(AB) \perp (BCD)$

و $(CC") \subset (BCD)$ إذن $(AB) \perp (CC")$

إذن $(CC") \perp (BD)$

$(CC") \perp (AB)$

و (BD) و(BA) متقاطعان ضمن (ABD)

وبالتالي $(CC") \perp (ABD)$

بما ان $(AD) \subset (ABD)$

إذن $(CC") \perp (AD)$

ولدينا $(CC') \perp (AD)$ لأن (CC') ارتفاع في المثلث ACD.

ولدينا (CC') و(CC") متقاطعان ضمن (CC'C")

إذن $(AD) \perp (CC'C")$

تمرين 21

ABC مثلث ضمن المستوى (P) وH مركز تعامده وO نقطة من المستقيم العمودي على (P) في H حيث $H \neq O$

1) أ - بين أن : $(AB) \perp (CHO)$

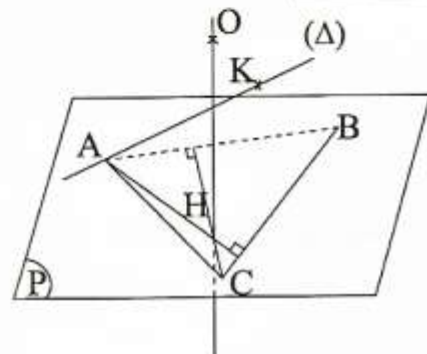
ب - استنتج أن : $(OC) \perp (AB)$

2) بين أن : $(OA) \perp (BC)$

3) المستقيم (Δ) المار من A والعمودي على (OBC) يقطع هذا المستوى في النقطة K.

بين أن : $(OK) \perp (BC)$

الجواب :



1) أ - لدينا H مركز تعامد المثلث ABC

إذن $(CH) \perp (AB)$ ①

لدينا $(P) \perp (OH)$

و $(AB) \subset (P)$

إذن $(OH) \perp (AB)$ ②

لدينا (CH) و(OH) متقاطعان في H وضمن المستوى (CHO) ③

من ① و② و③ نستنتج أن

$(AB) \perp (CHO)$

ب - لدينا $(AB) \perp (CHO)$

و $(OC) \subset (CHO)$

إذن $(AB) \perp (OC)$

2) لدينا $\begin{cases} (BC) \subset (P) \\ (P) \perp (OH) \end{cases}$

إذن $(BC) \perp (OH)$

لدينا $(AH) \perp (BC)$ لأن H مركز تعامد المثلث ABC

و(AH) و(OH) متقاطعان وضمن المستوى (AOH)

ومنه $(AOH) \perp (BC)$

وبما أن $(OA) \subset (AOH)$

فإن $(OA) \perp (BC)$

3) لدينا حسب 2) : $(OA) \perp (BC)$

لدينا $(AK) \perp (OBC)$

و $(BC) \subset (OBC)$

إذن $(AK) \perp (BC)$

لدينا (AK) و(OA) متقاطعان في A وضمن المستوى (OAK) .

إذن $(BC) \perp (OAK)$

وبما أن $(OK) \subset (OAK)$

فإن $(BC) \perp (OK)$

تمرين 22 :

نعتبر ABCD رباعي أوجه حيث :

$(AC) \perp (AD)$ و $(AB) \perp (AC)$

و $(AB) \perp (AD)$ و M نقطة من [DH]

بحيث $M \neq B$ و $M \neq C$.

المستقيم المار من M والموازي لـ (BD) يقطع (DC) في N والمستقيم المار من M والموازي لـ (AC) يقطع (AB) في Q.

1 - ارسم الشكل

2 - بين ان : $(AC) // (MNQ)$

و $(BD) // (MNQ)$

3 - الموازي لـــ (AC) والمار من N يقطع (AD) في P

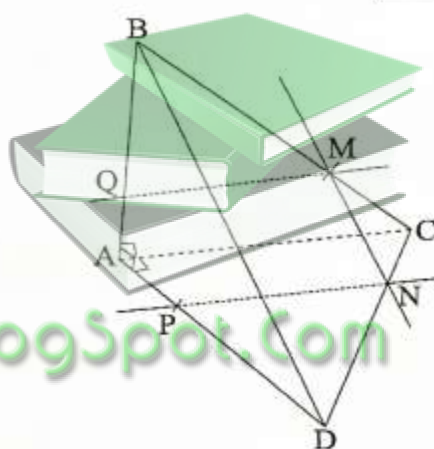
a - بين أن : $P \in (MNQ)$

b - بين أن : $(NP) \perp (PQ)$ ثم أن الرباعي MNPQ مستطيل .

4 - علما أن : $AD = 4$ و $AC = 3$ و $AB = 2$ احسب حجم رباعي الأوجه ABCD.

الجواب :

1 -



2 - لدينا $(AC) // (QM)$

و $(QM) \subset (MNQ)$

إذن $(AC) // (MNQ)$

لدينا $(BD) // (MN)$

و $(MN) \subset (MNQ)$

إذن $(BD) // (MNQ)$

3 - a - لدينا $(MQ) // (AC)$

و $(NP) // (AC)$

إذن $(MQ) // (NP)$

ومنه M ، N، P ، Q نقط مستوائية

وبالتالي $P \in (MNQ)$

b - لدينا $(AC) \perp (AB)$

$(AC) \perp (AD)$

(AB) و(AD) متقاطعان ضمن المستوى (ABD) .

ومنه $(AC) \perp (ABD)$

ولدينا $(NP) // (AC)$

ومنه $(NP) \perp (ABD)$

ولدينا $(PQ) \subset (ABD)$

ومنه $(NP) \perp (PQ)$

لدينا $(MNQ) \cap (ABD) = (PQ)$

ولدينا $(MN) \subset (MNQ)$

$(BD) \subset (ABD)$

و $(BD) // (MN)$ إذن حسب مبرهنة السقف فإن $(MN) // (PQ)$

إذن M ، N، P ، Q نقط مستوائية

و $(MN) // (PQ)$ و $(MQ) // (NP)$

و $(NP) \perp (PQ)$

إذن MNPQ مستطيل

4 - حجم رباعي الأوجه هو :

$$V = \frac{1}{3} . AB . \frac{AD . AC}{2}$$

$$= \frac{2 . 4 . 3}{6}$$

أي $V = 4$





تمرين 1 :

ABCDEFGH مكعبا في الفضاء و I منتصف [BF] و J منتصف [DH] و K منتصف [AE].

1) - بين أن (BJ) // (IHE)

2) - بين أن (JBH) // (IHE)

تمرين 2 :

ليكن ABCD مربع و S نقطة خارجه وI منتصف [AD] .

1) - حدد تقاطع المستويين (SAC) و(SBD)

2) - حدد تقاطع المستويين (SAB) و(SDC)

3) - حدد تقاطع المستويين (SCI) و(SAB)

تمرين 3 :

ليكن ABCD رباعي الاوجه بحيث المستقيم العموي على المستوى (ACD) والمار من B يقطع (ACD) في نقطة K هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ACD .

1 - بين أن : $(BC) \perp (AD)$ و $(CD) \perp (AB)$

2 - المستقيم المار من A والعمودي على (BCD) يقطعه في H.

أ - بين أن : $(AH) \perp (AK)$

ب - بين أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث BCD.

تمرين 4 :

نعتبر هرما رأسه S وقاعدته متوازي أضلاع ABCD

لتكن النقطة M من القطعة [SA] والنقطة N من القطعة [SB] والنقطة E من القطعة [SC]





بحيث : $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SE}{SC} = \frac{2}{3}$

1 - بين أن : $(MNE) // (ABC)$

2 - أ - استنتج أن المستقيم (SD) يقطع المستوى (MNE) في نقطة F

- ب - ما هي طبيعة الرباعي MNEF

3 - لتكن I نقطة تقاطع (AN) و (BM) و J نقطة تقاطع (FC) و (ED).

بين أن : $(IJ) \perp (BC)$

تمرين 5 :

ليكن ABCDEFGH مكعبا في الفضاء $(\mathscr{E})$

1) -أثبت ان المثلث AFC متساوي الاضلاع

2) - أثبت ان : $(BF) \perp (AC)$

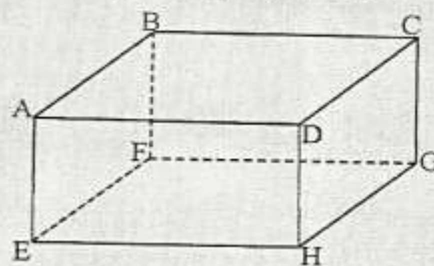
3) - أثبت ان : $(AC) \perp (FH)$

4) - ما هي طبيعة الرباعي BDHF ؟

5) - احسب حجم رباعي الاوجه ABCF علما أن $AB = 2\text{ cm}$.

تمرين 6 :

ABCDEFGH متوازي المستطيلات (انظر الشكل)، I و J منتصفا القطعتين [AH] و [AG]



1 - أ - بين أن المستقيم (IJ) يوازي المستقيم (CD).

ب - استنتج أن $(IJ) \perp (BCG)$ ثم $(IJ) \perp (BF)$

2 - حدد تقاطع المستويين (IJC) و (CGD)

3 - لتكن K منتصف القطعة [CH]

بين ان المستويين (IJK) و(ABC) متوازيان .



تمرين 7 :

ليكن SABCD هرما قاعدته المستطيل ABCD و O مركز المستطيل.

I و J منتصفا القطعتين [SA] و [SB] على التوالي.

1 - أنشئ الشكل .

2 - أ - بين ان : (IJ) // (SCD)

ب - بين ان : (OIJ) // (SDC)

3 - حدد تقاطع المستويين (ICD) و (IAB)

4 - نفترض أن (ABC) ⊥ (SD)

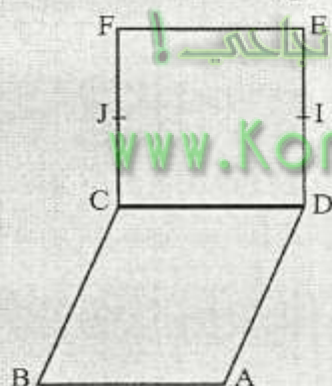
أ - بين أن (AD) ⊥ (SDC)

ب - استنتج أن (ADS) ⊥ (SDC)

تمرين 8 :

ABCD و CFED مربعان بحيث يكون المستقيمان (ED) و (AD) متعامدان.

I و J و K هي على التوالي منتصفات [DE] و [CF] و [BF] (انظر الشكل)



1 - بين ان (IJ) // (ABF)

2 - حدد تقاطع المستويين (ADJ) و (BCI)

3 - بين ان المستويين (ABF) و (CDK) متعامدان

4 - احسب حجم الهرم ABCDE إذا علمت ان CF = 3 cm.

تمرين 9 :

ليكن ABCDEFGH مكعبا و I و J منتصفي القطعتين [BC] و [FG] على التوالي.

1 - بين ان المستقيم (IJ) يوازي المستوى (HFB)

2 - المستقيمان (EJ) و (HF) يتقاطعان في P

والمستقيمان (AI) و (BD) يتقاطعان في Q

أ - بين أن المستويين (HFB) و (EIJ) يتقاطعان وفق المستقيم (PQ)

ب - استنتج ان (PQ) // (FB)

ج - بين ان (PQ) ⊥ (ABC) ثم استنتج أن (PQ) ⊥ (AI)



الدوال العددية (1)

- عدد الصفحات : [25]
- عدد التمارين : [24]
- عدد تمارين البحث : [12]



11 الدوال العددية (1)

1. دالة عددية لمتغير حقيقي :

عندما نقول إن f دالة عددية لمتغير حقيقي من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

فإننا نعني بذلك أنه لكل عنصر من مجموعة الانطلاق $\mathbb{R}$ له صورة واحدة على الأكثر في مجموعة الوصول $\mathbb{R}$.

2. مجموعة تعريف دالة :

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي.

مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية التي تقبل صورة بالدالة f

3. تساوي دالتين :

$f = g$ يعني $\begin{cases} D_f = D_g = D \\ f(x) = g(x) \quad \text{لكل } x \in D \end{cases}$

4. التمثيل المباني لدالة عددية :

التمثيل المباني للدالة f في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هو مجموعة النقط

$$(\mathscr{C}_f) = \{ M(x, f(x)) \ / \ x \in D_f \}$$

ملاحظة : $M(x, y) \in (\mathscr{C}_f)$ يعني $x \in D_f$ و $y = f(x)$

5. دالة زوجية - دالة فردية :

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي :

– f دالة زوجية يعني $\begin{cases} \text{لكل } x \in D_f \text{ لدينا } -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

– f دالة فردية يعني $\begin{cases} \text{لكل } x \in D_f \text{ لدينا } -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

التأويل الهندسي

1 - إذا كانت f دالة زوجية فإن محور الأراتيب محور تماثل لـــ $(\mathscr{C}_f)$

2 - إذا كانت f دالة فردية فإن O أصل المعلم مركز تماثل لـــمنحى $(\mathscr{C}_f)$

6- تغير دالة عددية :

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن مجموعة تعريف f ، D_f.

- f تزايدية (تزايدية قطعا) على I يعني لكل x_1 و x_2 من I.

إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$

- f تناقصية (تناقصية قطعا) على I يعني لكل x_1 و x_2 من I.

إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) \geq f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$

7- معدل تغير دالة :

ا – تعريف :

f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها.

ليكن x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من D_f العدد الحقيقي $T(x_1 , x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ يسمى معدل تغيرات f بين x_1 و x_2.

2 – خاصية :

إذا كان لكل x_1 و x_2 من I $(I \in D_f)$.

أ - $T(x_1 , x_2) \geq 0$ فإن f تزايدية على I.

ب - $T(x_1 , x_2) > 0$ فإن f تزايدية قطعا على I.

ج - $T(x_1 , x_2) < 0$ فإن f تناقصية على I.

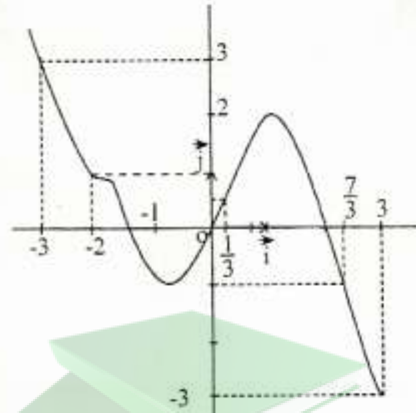
ب - $T(x_1 , x_2) < 0$ فإن f تناقصية قطعا على I.



تمارين وحلولها

تمرين 1 :

لتكن f دالة عددية تمثيلها المبياني في معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ كالآتي :



1 - حدد صور الأعداد التالية بالدالة f :

$-2 , 2 , 1 , 0$.

2 - حدد سابق كل من الأعداد التالية بالدالة f : $0 , -3 , 3 , -1$.

الجواب :

ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لـ f .

1 - نلاحظ أن النقط $O(0 , 0)$; $A(1, 2)$; $B(2 , 0)$ و $C(-2 , 1)$ تنتمي إلى $(\mathscr{C})$

إذن: $f(0) = 0$ ، $f(1) = 2$ ، $f(2) = 0$ ، $f(-2) = 1$.

2 - لدينا $O(0 , 0)$ و $B(2 , 0) \in (\mathscr{C})$ و $D(-\frac{3}{2} , 0)$ تنتمي إلى $(\mathscr{C})$.

إذن 0 له ثلاث سوابق وهي : $0 , 2 , -\frac{3}{2}$

لدينا $(\mathscr{C}) \ni E(3 , -3)$ إذن سابق 3- هو 3

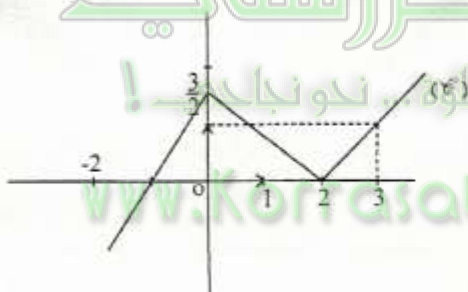
ولدينا $F(-3, 3)$ إذن سابق 3- هو 3

ولدينا $G(\frac{7}{3}, -1) \in (\mathscr{C})$ و $H(-1, -1) \in (\mathscr{C})$

إذن 1- له سابقان هما 1- و $\frac{7}{3}$

تمرين 2 :

لتكن f دالة عددية تمثيلها المبياني كالآتي :



هل النقط $A(3 , 1)$ و $B(-1 , 0)$ و $C(0 , \frac{3}{2})$ و $D(1, 2)$ و $E(4 , 0)$ تنتمي إلى المنحنى $(\mathscr{C})$.

الجواب :

من خلال المبيان نلاحظ أن :

النقط $A(3 , 1)$ و $B(-1 , 0)$ و $C(0 , \frac{3}{2})$ تنتمي إلى المنحنى $(\mathscr{C})$.

النقطتان $D(1 , 2)$ و $E(4 , 0)$ لا تنتمي إلى المنحنى $(\mathscr{C})$.

تمرين 3 :

1 - لتكن الدالة العددية المعرفة بـــ : $f(x) = \frac{x+3}{2x^2 - x}$ حدد الأعداد التي تقبل صورة بـــ f من بين : $1 , 2 , 0 , \frac{1}{2}$.

2 - نفس السؤال بالنسبة للأعداد :

$0 , 2 , 5 , 1 , -3$.

حيث f هي الدالة المعرفة بـــ :

$f(x)=\sqrt{x^2 - 4x}$

الجواب :

1 - لدينا $x \in D_f$ يعني $2x^2 - x \neq 0$

يعني $x(2x - 1) \neq 0$

يعني $x \neq 0$ و $2x - 1 \neq 0$

يعني $x \neq 0$ و $x \neq \frac{1}{2}$

وبالتالي : $D_f = \mathbb{R} - \left\{0 , \frac{1}{2}\right\}$

بما أن 1 و 2 تنتمي إلى D_f فإن هذه الأعداد تقبل صور بـــ f

لدينا 0 و $\frac{1}{2}$ لا ينتميان إلى D_f إذن 0 و $\frac{1}{2}$ لايقبلان صورة بـــ f.

2 - $x \in D_f$ يعني $x^2 - 4x \geq 0$

و

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$x^2 - 4x$		+	0	-	0	+	

إذن $Df =]-\infty , 0] \cup [4 , +\infty[$

لدينا 0 و 5 و -3 أعداد تنتمي إلى D_f إذن فهي تقبل صورا بـــ f.

لدينا 2 و 1 لا ينتميان إلى D_f إذن 2 و 1 لا يقبلان صورة بـــ f.

تمرين 4 :

حدد مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة :

1- $f(x) = \frac{2x-1}{x^2 - 4}$

2- $f(x) = \frac{|x|}{3 - x}$

3- $f(x) = \frac{x}{(x+4)^2}$

4- $f(x) = \frac{x+7}{|x| - 1}$

5- $f(x) = \frac{2x}{3 + |x|}$

6- $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2 + 3}$

الجواب :

1 - $x \in D_f$ يعني $x^2 - 4 \neq 0$

يعني $x^2 \neq 4$

يعني $x \neq 2$ و $x \neq -2$

وبالتالي : $D_f = \mathbb{R} - \{-2 , 2\}$

2 - $x \in D_f$ يعني $3 - x \neq 0$

يعني $x \neq 3$

وبالتالي : $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

3 - $x \in D_f$ يعني $(x+4)^2 \neq 0$

يعني $x + 4 \neq 0$

يعني $x \neq -4$

وبالتالي : $D_f = \mathbb{R} - \{-4\}$



4 - $x \in D_f$ يعني $|x-1| \neq 0$

يعني $|x| \neq 1$

يعني $x \neq 1$ و $x \neq -1$

وبالتالي : $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

5 - $x \in D_f$ يعني $3 + |x| \neq 0$

يعني $|x| \neq -3$

وهذا دائما صحيح كيفما كانت x.

وبالتالي : $D_f = \mathbb{R}$

6 - $x \in D_f$ يعني $x^2 + 3 \neq 0$

يعني $x^2 \neq -3$

وهذا صحيح دائما كيفما كانت قيمة x.

وبالتالي : $D_f = \mathbb{R}$

تمرين 5 :

حدد مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1 - $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

2 - $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+5x-14}$

3 - $f(x) = \dfrac{4x-3}{|x^2+x|-2}$

4 - $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2-x}$

5 - $f(x) = x\sqrt{2-x}$

6 - $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{1-x}}$

الجواب :

1 - $x \in D_f$ يعني $x \geqslant 0$ و $x^2+1 \neq 0$

يعني $x \geqslant 0$ و $x^2 \neq -1$

الشرط الثاني دائما صحيح

إذن $D_f = [0, +\infty[$

2 - $x \in D_f$ يعني $x^2 - 5x - 14 \neq 0$

لنحل المعادلة $x^2 - 5x - 14 = 0$

لدينا $\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 56 = 81$

إذن $x = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5+9}{2} = 2$

أو $x = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-9}{2} = -7$

وبالتالي $D_f = \mathbb{R} - \{-7, 2\}$

3 - $x \in D_f$ يعني $|x^2+x| - 2 \neq 0$

يعني $|x^2+x| \neq 2$

يعني $x^2+x \neq 2$ و $x^2+x \neq -2$

يعني $x^2+x-2 \neq 0$ و $x^2+x+2 \neq 0$

لنحل المعادلة $x^2+x-2=0$

لدينا $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9$

إذن $x = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

أو $x = \dfrac{-1-3}{2} = -2$

لنحل المعادلة $x^2+x+2=0$

لدينا $\Delta = b^2 - 4ac$

أي $\Delta = 1 + 8 = 9 < 0$

العادلة الأخيرة لا تقبل حلا في R

وبالتالي : مجموعة تعريف الدالة f هي :

$D_f = \mathbb{R} - \{-2 , 1\}$

4- $x \in D_f$ يعني $x^3 - x \neq 0$

يعني $x(x^2 - 1) \neq 0$

يعني $x \neq 0$ و $x^2 - 1 \neq 0$

يعني $x \neq 0$ و $x^2 \neq 1$

يعني $x \neq 0$ و $x \neq 1$ و $x \neq -1$

وبالتالي $D_f = \mathbb{R} - \{-1 , 1 , 0\}$

5- $x \in D_f$ يعني $2 - x \geqslant 0$

يعني $x < 2$

وبالتالي $D_f =]-\infty , 2]$

6- $x \in D_f$ يعني $1 - x > 0$

يعني $x < 1$

وبالتالي $D_f =]-\infty , 1[$

تمرين 6 :

حدد مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة :

1- $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

2- $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{3x-5}}$

3- $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{3x-5}}$

4- $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{3x^2 - 4x - 4}$

5- $\begin{cases} f(x) = \sqrt{4 - x^2} & ; x \leqslant 2 \\ f(x) = \dfrac{3x}{x-2} & ; x > 2 \end{cases}$

الجواب :

1- $x \in D_f$ يعني $x^2 - 2x \geqslant 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x^2 - 2x$		+	0	-	0	+	

وبالتالي $D_f =]-\infty , 0] \cup [2 , +\infty[$

2- لدينا $x \in D_f$ يعني $3x - 5 \neq 0$

و $\dfrac{x+3}{3x-5} \geqslant 0$

يعني $x \neq \dfrac{5}{3}$ و $\dfrac{x+3}{3x-5} \geqslant 0$

x	$-\infty$		-3		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$x+3$		-	0	+		+	
$3x-5$		-		-	0	+	
$\frac{x+3}{3x-5}$		+	0	-	‖	+	

وبالتالي $D_f =]-\infty , -3] \cup]\dfrac{5}{3} , +\infty[$

3- لدينا $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{3x-5}}$

$x \in D_f$ يعني $x + 3 \geqslant 0$ و $3x - 5 > 0$

يعني $x \geqslant -3$ و $x > \dfrac{5}{3}$

وبالتالي : $D_f =]\dfrac{5}{3} , +\infty[$

4- $x \in D_f$ يعني $1 - x \geqslant 0$

و $3x^2 - 4x - 4 \neq 0$

يعني $x \leqslant 1$ و $3x^2 - 4x - 4 \neq 0$

لنحل المعادلة $3x^2 - 4x - 4 = 0$

لدينا $\Delta' = b'^2 - 4ac = 4 + 4 \times 3 = 16$



إذن $x = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{2+4}{3} = 2$

أو $x = \frac{2-4}{3} = -\frac{2}{3}$

وبالتالي مجموعة التعريف هي :

$D_f =]-\infty, 1] - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

أي أن $D_f =]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]-\frac{2}{3}, 1]$

5 - $x \in D_f$ يعني $(4 - x^2 \geq 0$ و $x \leq 2)$

أو $(x - 2 \neq 0$ و $x > 2)$

يعني $(x^2 \leq 4$ و $x \leq 2)$

أو $(x \neq 2$ و $x > 2)$

يعني $(|x| \leq 2$ و $x \leq 2)$

أو $(x > 2)$

يعني $(-2 \leq x \leq 2$ و $x \leq 2)$

أو $(x > 2)$

وبالتالي $D_f = [-2, +\infty[$

تمرين 7 :

هل الدالتين f و g متساويتين في كل حالة :

1 - $f(x) = x - 5 + \frac{9}{x+1}$

$g(x) = \frac{(x-2)^2}{x+1}$

2 - $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

$g(x) = \frac{1}{x+2}$

3 - $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x-1}$

$g(x) = (x+2)^2 + 3 + \frac{8}{x-1}$

الجواب :

1 - لدينا $f(x) = x - 5 + \frac{9}{x+1}$

إذن : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

لدينا : $g(x) = \frac{(x-2)^2}{x+1}$

إذن : $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

ومنه $D_f = D_g$ ①

لدينا $f(x) = x - 5 + \frac{9}{x+1}$

$= \frac{(x-5)(x+1)}{x+1} + \frac{9}{x+1}$

$= \frac{(x-5)(x+1)+9}{x+1}$

$= \frac{x^2 + x - 5x - 5 + 9}{x+1}$

$= \frac{x^2 - 4x + 4}{x+1}$

$= \frac{(x-2)^2}{x+1}$

$= g(x)$

إذن ② $f(x) = g(x)$

من ① و② نستنتج أن $f = g$

2 - لدينا $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

$x \in D_f$ تكافئ $x \in \mathbb{R}$ و $x^2 - 4 \neq 0$

أي أن $x \in \mathbb{R}$ و $x^2 \neq 4$

إذن : $x \in \mathbb{R}$ و $x \neq -2$ و $x \neq 2$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

لدينا $g(x) = \frac{1}{x+2}$



$Dg = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

بما أن $D_f \neq Dg$

فإن : $g \neq f$

3 - $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x-1}$

لدينا $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

لدينا $g(x) = (x+2)^2 + 3 + \dfrac{8}{x-1}$

لدينا $Dg = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

إذن $D_f = Dg = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ①

لكل x من $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ لدينا

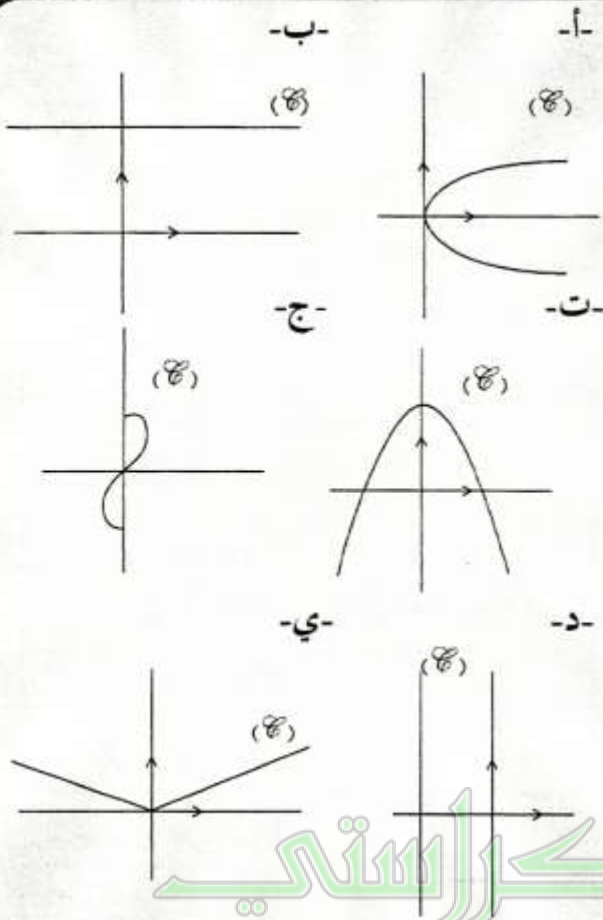
$$g(x) = (x+2)^2 + 3 + \frac{8}{x-1}$$
$$= x^2 + 4x + 4 + 3 + \frac{8}{x-1}$$
$$= x^2 + 4x + 7 + \frac{8}{x-1}$$
$$= \frac{(x^2 + 4x + 7)(x-1) + 8}{x-1}$$
$$= \frac{x^3 - x^2 + 4x^2 - 4x + 7x - 7 + 8}{x+1}$$
$$= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x+1}$$
$$= \frac{(x+1)^3}{x-1}$$
$$= f(x)$$

إذن $f(x) = g(x)$ ②

من ① و ② نستنتج أن $f = g$

تمرين 8 :

من بين المنحنيات التالية حدد المنحنى الذي يمثل دالة :



الجواب :

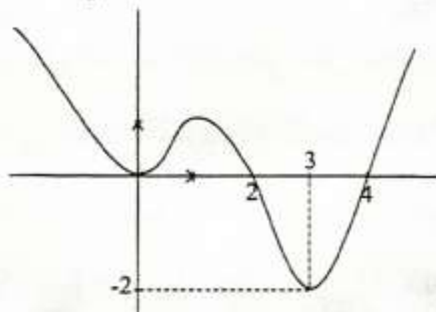
المنحنيات ب - ت و ي هي منحنيات تمثل دوالا عددية.

المنحنيات أ - ج و د لا تمثل دوالا عددية.

لأنه توجد مثلا في أ - كل عدد موجب له صورتين.

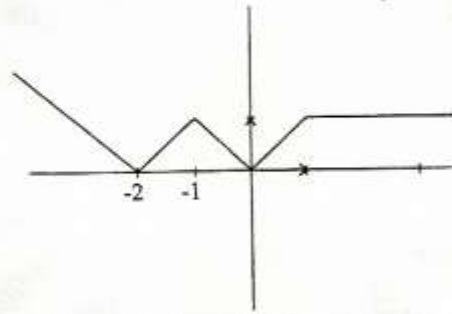
تمرين 9 :

اعط جدول تغيرات الدالة f في كل حالة





- 2



الجواب :

1 - جدول تغيرات f.

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
f(x)	↘	0	1	-2	↗

2 - جدول تغيرات f.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
f(x)	↘	0	1	0	1	→

تمرين 10 :

لتكن f الدالة العددية التي جدول تغيراتها كالآتي :

x	-2	2	4	9
f(x)	-6	-9	-3	-10

1- حدد تغيرات الدالة f على كل مجال

2 - ما هي القيمة القصوى والقيمة الدنيا لـ f في المجالات التالية :

أ - $[-2 , 9]$ ب - $[2 , 9]$ ج - $[4 , 9]$

3 - قارن العددين التاليين (في الحالات التالية

أ - $f(-2)$ و $f(-1)$, ب - $f(2)$ و $f(3)$

ج - $f(3)$ و $f(1)$, د - $f(7)$ و $f(5)$

4 - أنشئ منحنى ممثلا لـ f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجواب :

1 - f تناقصية قطعا على $[-2 , 2]$

f تزايدية قطعا على $[2 , 4]$

f تناقصية قطعا على $[4 , 9]$

2 - أ - f تقبل قيمة دنيا في $x_0 = 2$ وذلك في المجال $[-2 , 4]$.

ب - f تقبل قيمة قصوى في $x_1 = 4$ وذلك في المجال $[-2 , 9]$.

ج -

3 - أ - f تناقصية على $[-2 , 2]$ و-2 و -1 ينتميان إلى $[-2 , 2]$ مع $-1 > -2$ إذن $f(-1) < f(-2)$

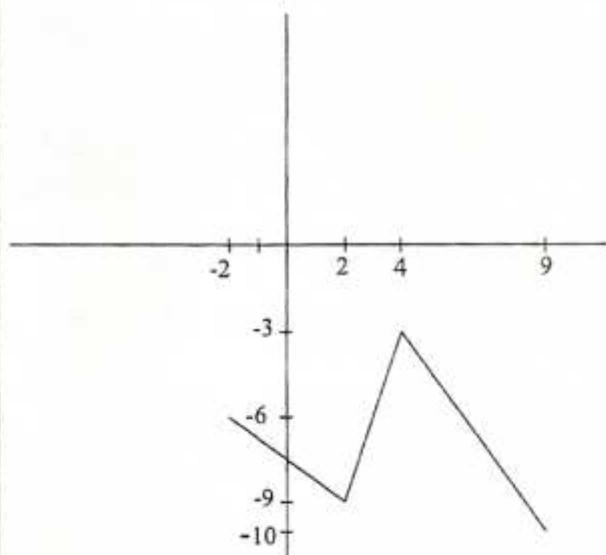
ب - f تزايدية قطعا على $[2 , 4]$ ولدينا $2 < 3$ ومنه $f(2) < f(3)$.

ج -لايمكن في هذه الحالة مقارنة $f(3)$ و $f(1)$ لأن 1 و 3 يوجدان في مجالين تختلف فيهما تغيرات f.

د - لدينا f تناقصية قطعا على $[4 , 9]$ و 5 و 7 عنصران من $[4 , 9]$

ولدينا $5 < 7$ إذن $f(7) < f(5)$.

4 - هذا فقط رسم مقارب لمنحنى f



تمرين 11 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر الدالة f التي منحناها كالتالي :

1 - حدد تغيرات الدالة f.

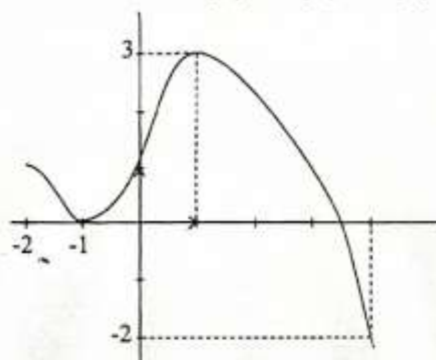
2 - اعط جدول تغيرات f.

3 - حدد القيمة القصوى والقيمة الدنيا المطلقة لـ f.

4 - قارن الأعداد التالية :

أ- f(-2) , f(0) , f(3).

ب- f(2) , f(3) , f(4).



الجواب :

1 - f تناقصية على [-2 ، -1] وعلى [1 ، 4]

f تزايدية قطعا على [1 ، 2]

2 - جدول تغيرات f.

x	-2		-1		1		4
f(x)	1	↘	0	↗	3	↘	-2

3 - f تقبل قيمة قصوى مطلقة في 1

f تقبل قيمة دنيا نسبية في 1-

4 - من خلال المنحنى نلاحظ أن :

أ - $f(0) = f(3) = f(-2) = 1$

ب - لدينا f تناقصية قطعا على المجال [1 ، 4]

ولدينا 2 , 3 , 4 عناصر من [1 ، 4]

وحيث أن $2 < 3 < 4$

فإن $f(4) < f(3) < f(2)$

تمرين 12 :

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = -3x^2 + 4$

1 - أدرس تغيرات الدالة f على المجالين $\mathbb{R}^+$ و $\mathbb{R}^-$.

2 - اعط جدول تغيرات f.

3 - حدد القيمة القصوية للدالة f.



الجواب :

1 - ليكن x و y من $\mathbb{R}^+$ بحيث $x<y$

لدينا $x<y$ إذن $x^2<y^2$

ومنه $-3x^2>-3y^2$

إذن $-3x^2+4>-3y^2+4$

إذن $f(x)>f(y)$

إذن f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^+$

ليكن x و y من $\mathbb{R}^-$ بحيث $x<y$

لدينا $x<y$ إذن $x^2>y^2$

ومنه $-3x^2<-3y^2$

إذن $-3x^2+4<-3y^2+4$

إذن $f(x)<f(y)$

إذن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^-$

2 - جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↗	4	↘

3 - من خلال جدول التغيرات فإن f تقبل قيمة قصوى في 0 وهي : 4.

تمرين 13 :

بين أن :

1 - الدالة العددية : $f : x \longmapsto x^2 - x$

تزايدية على المجال $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ وتناقصية

على $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$

2 - الدالة $f : x \longmapsto \frac{2x-1}{x-2}$ تناقصية

على المجالين $]-\infty, 2[$ و $]2, +\infty[$

الجواب :

1 - لنحسب معدل تغيرات f.

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ بحيث $x \neq y$:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{x^2-x-y^2+y}{x-y}$$

$$= \frac{x^2-y^2-(x-y)}{x-y}$$

$$= \frac{x^2-y^2-(x-y)}{x-y}$$

$$= \frac{(x-y)(x+y-1)}{x-y}$$

وبالتالي $T(f) = \boxed{(x+y-1)}$

* في المجال $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ لدينا :

$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ y > \frac{1}{2} \end{cases}$ ومنه $x+y>1$

وبالتالي $x+y-1>0$

ومنه f تزايدية على $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

* في المجال $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ لدينا :

$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ y < \frac{1}{2} \end{cases}$ إذن $x+y<1$ ومنه $x+y-1<0$

وبالتالي f تناقصية على $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$

2 - لنحسب معدل تغيرات f .

لكل x و y من $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ بحيث $x \neq y$

لدينا : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\frac{2x-1}{x-2} - \frac{2y-1}{y-2}}{x-y}$

$= \frac{2xy - 4x - y + 2 - 2xy + x + 4y - 2}{(x-2)(y-2)(x-y)}$

$= \frac{-3x + 3y}{(x-2)(y-2)(x-y)}$

$= \frac{-3(x-y)}{(x-2)(y-2)(x-y)}$

إذن $T(f) = \frac{-3}{(x-2)(y-2)}$

في المجال $]2 , +\infty[$

لدينا $\begin{cases} x>2 \\ y>2 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x-2>0 \\ y-2>0 \end{cases}$

إذن $(x-2)(y-2) > 0$

وبالتالي $T(f) = \frac{-3}{(x-2)(y-2)} < 0$

إذن f تناقصية على المجال $]2 , +\infty[$

في المجال $]-\infty , 2[$ لدينا :

$\begin{cases} x<2 \\ y<2 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x-2<0 \\ y-2<0 \end{cases}$

ومنه $(x-2)(y-2) > 0$

وبالتالي $T(f) = \frac{-3}{(x-2)(y-2)} < 0$

إذن f تناقصية على المجال $]-\infty , 2[$

تمرين 14 :

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

1 - أدرس تغيرات الدالة f على المجالين $[-1 , +\infty[$ و $]-\infty , -1]$

2 - اعط جدول تغيرات الدالة f.

3 - حدد نقط تقاطع $(\mathscr{C})$ التمثيل المبياني للدالة f مع محوري المعلم

الجواب :

1 - لنحسب معدل التغيرات ليكن x و y من $\mathbb{R}$ / $x \neq y$

لدينا $\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$

$= \frac{2x^2 + 4x - 6 - 2y^2 - 4y + 6}{x - y}$

$= \frac{2(x^2 - y^2) + 4(x - y)}{x - y}$

$= \frac{(x - y)(2(x + y) + 4)}{x - y}$

إذن $T(f) = 2(x + y) + 4$

في المجال $[-1 , +\infty[$ لدينا

$\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$ إذن $x + y \geq -2$

ومنه $2(x + y) \geq -4$

إذن $T(f) = 2(x + y) + 4 \geq 0$

ومنه f تزايدية على $[-1 , +\infty[$ في المجال $]-\infty , -1]$

$\begin{cases} x \leq -1 \\ y \leq -1 \end{cases}$ إذن $x + y \leq -2$

ومنه $2(x + y) \leq -4$

إذن $T(f) = 2(x + y) + 4 \leq 0$

ومنه f تناقصية على $]-\infty , -1]$

2 - جدول تغيرات f.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f(x)	↘	-8	↗



3 - $(\mathscr{C}_f)$ يقطع محور الأراتيب في

$A(0, f(0))$ أي $A(0, -6)$

• لنحل المعادلة $f(x) = 0$

أي أن $2x^2 + 4x - 6 = 0$

أي أن $x^2 + 2x - 3 = 0$

لدينا : $\Delta' = 1^2 + 3 = 4 > 0$

إذن $x = \frac{-1+2}{1} = 1$

أو $x = \frac{-1-2}{1} = -3$

وبالتالي $(\mathscr{C}_f)$ يقطع محور الأفاصيل في

$B(1, 0)$ و $C(-3, 0)$

تمرين 15:

نعتبر الدالة المعرفة بـ : $f(x) = \frac{1}{x} + x$

1 - a - حدد مجموعة تعريف f.

b - بين أن لكل x و y من $\mathbb{R}^*$ بحيث $x \neq y$

لدينا $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{xy - 1}{xy}$

2 - أدرس تغيرات f على المجالات $]0, 1]$ و $[1, +\infty[$ و $[-1, 0[$ و $]-\infty, -1]$

الجواب :

1 - a - $x \in Df$ يعني $x \neq 0$

ومنه $Df = \mathbb{R}^*$

b - لكل x و y من $\mathbb{R}^*$ بحيث $x \neq y$

لدينا $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}}{x - y}$

$= (x - y + \frac{y - x}{xy}) \times \frac{1}{x - y}$

ومنه $T(f) = 1 - \frac{1}{xy}$

2 - في المجال $]0, 1]$

لدينا $\begin{cases} 0 < x \leqslant 1 \\ 0 < y \leqslant 1 \end{cases}$ ومنه $0 < xy \leqslant 1$

إذن $\frac{1}{xy} \geqslant 1$

ومنه $T(f) = 1 - \frac{1}{xy} \leqslant 0$

إذن f تناقصية على المجال $]0, 1]$

في المجال $[1, +\infty[$

لدينا $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ y \geqslant 1 \end{cases}$ ومنه $xy \geqslant 1$

إذن $\frac{1}{xy} \leqslant 1$

ومنه $T(f) = 1 - \frac{1}{xy} \geqslant 0$

إذن f تزايدية على المجال $[1, +\infty[$

في المجال $[-1, 0[$

لدينا $\begin{cases} -1 \leqslant x < 0 \\ -1 \leqslant y < 0 \end{cases}$ إذن $0 < xy \leqslant 1$

ومنه $\frac{1}{xy} \geqslant 1$

أي $T(f) = 1 - \frac{1}{xy} \leqslant 0$

إذن f تناقصية على المجال $[-1, 0[$

في المجال $[1, +\infty[$

لدينا $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ y \geqslant 1 \end{cases}$ ومنه $xy \geqslant 1$

إذن $\frac{1}{xy} \leqslant 1$

ومنه $T(f) = 1 - \frac{1}{xy} \geqslant 0$

إذن f تزايدية على المجال $[1, +\infty[$

في المجال $]-\infty, -1]$

لدينا $\begin{cases} x \leqslant -1 \\ y \leqslant -1 \end{cases}$ ومنه $xy \geqslant 1$

$T(f) = 1 - \frac{1}{xy} \leqslant 0$

ومنه f تناقصية على المجال $]-\infty, -1]$

تمرين 16:

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

بما يلي : $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$

1 - بين أن f دالة فردية.

2 - لكل a و b من $\mathbb{R}^*$ بحيث $a \neq b$ بين أن

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = 1 - \frac{4}{ab}$$

3 - أدرس تغيرات الدالة f على المجالين

$]0, 2]$ و $[2, +\infty[$

4 - اعط جدول تغيرات الدالة f

الجواب :

1 - لدينا مجموعة التعريف $D_f = \mathbb{R}^*$

لكل $x \in D_f$ لدينا $-x \in D_f$

و $f(-x) = \frac{(-x)^2 + 4}{-x} = -\frac{x^2 + 4}{x}$

ومنه $f(-x) = -f(x)$

وبالتالي f دالة فردية.

2 - لكل a و b من $\mathbb{R}^*$ بحيث $a \neq b$ لدينا :

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{\frac{a^2 + 4}{a} - \frac{b^2 + 4}{b}}{a - b}$$

$$= \frac{a^2b + 4b - ab^2 - 4a}{ab} \times \frac{1}{a - b}$$

$$= \frac{ab(a - b) - 4(a - b)}{ab} \times \frac{1}{a - b}$$

إذن $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = 1 - \frac{4}{ab}$

3- في المجال $[2, +\infty[$

لدينا $\begin{cases} a \geqslant 2 \\ b \geqslant 2 \end{cases}$ ومنه $ab \geqslant 4$

إذن $\frac{1}{ab} \leqslant \frac{1}{4}$

أي $\frac{4}{ab} \leqslant 1$

ومنه $T(f) = 1 - \frac{4}{ab} \geqslant 0$

إذن f تزايدية على المجال $[2, +\infty[$

في المجال $]0, 2]$

لدينا $\begin{cases} 0 < a \leqslant 2 \\ 0 < b \leqslant 2 \end{cases}$ إذن $0 < ab \leqslant 4$

إذن $1 \leqslant \frac{4}{ab}$

ومنه $T(f) = 1 - \frac{4}{ab} \leqslant 0$

إذن f تناقصية على المجال $]0, 2]$

4 - f دالة فردية وتزايدية على $[2, +\infty[$

وتناقصية على $]0, 2]$

وحيث أن الدالة الفردية تحافظ على الرتابة

فإن : f تزايدية على $]-\infty, -2]$ وتناقصية على $[-2, 0[$

وبالتالي :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f(x)		↗	-4	↘	‖	↘	4	↗	

تمرين 17 :

أنشئ منحنى الدالة f في كل حالة :

1) $f(x) = 3x$

2) $f(x) = 2x - 1$

3) $f(x) = -x + 3$

الجواب :

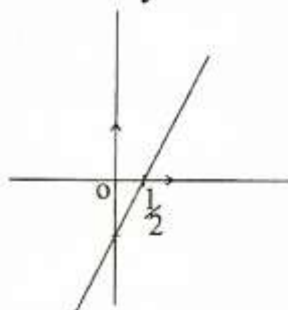
1 - المنحنى الممثل للدالة f هو مستقيم معادلته

$y = 3x$



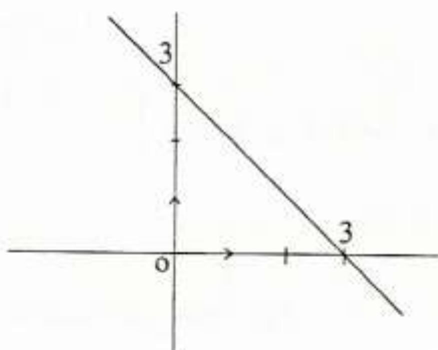
2 - التمثيل المبياني لـ f هو المستقيم الذي

معادلته $y = 2x - 1$



3 - المنحنى الممثل لـ f هو المستقيم

المعرف بـ $y = -x + 3$



تمرين 18 :

نعتبر الدالة f المعرفة بـ :

$$\begin{cases} f(x) = x + 2 \ ; x \geqslant -1 \\ f(x) = -x + 1 ; x < -1 \end{cases}$$

1 - أنشئ المنحنى الممثل لـ f في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2 - اعط جدول تغيرات f.

الجواب :

1 - في المجال $[2, +\infty[$ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عبارة

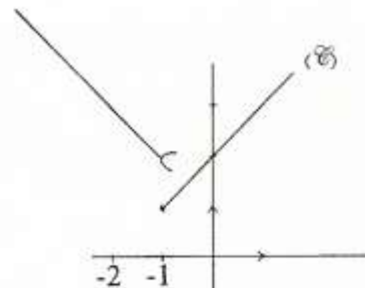
عن نصف مستقيم معادلته :

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x \geqslant -1 \end{cases}$$

وكذلك في المجال $]-\infty, -1[$ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$

عبارة عن نصف مستقيم معادلته :

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ x < -1 \end{cases}$$



2 - جدول تغيرات f.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f(x)	↘	1	↗

تمرين 19 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أنشئ التمثيل المبياني للدوال التالية :

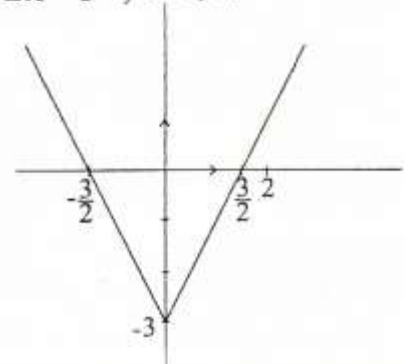
1) $f(x) = 2|x| - 3$

2) $g(x) = |2x - 3| - 1$

3) $h(x) = |x - 2| - x$

الجواب :

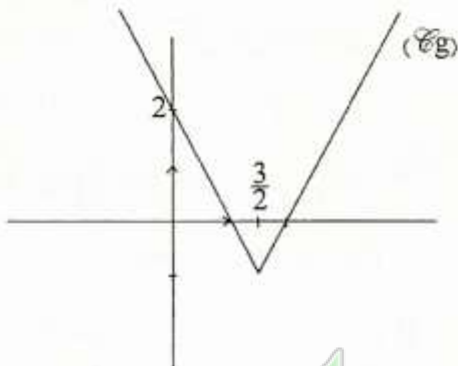
1 - لدينا
$$\begin{cases} f(x) = 2x - 3 & ; x \geqslant 0 \\ f(x) = -2x - 3 & ; x \leqslant 0 \end{cases}$$



2 - لدينا
$$\begin{cases} g(x) = 2x - 3 - 1 & ; x \geqslant \frac{3}{2} \\ g(x) = -2x + 3 - 1 & ; x \leqslant \frac{3}{2} \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} g(x) = 2x - 4 & ; x \geqslant \frac{3}{2} \\ g(x) = -2x + 2 & ; x \leqslant \frac{3}{2} \end{cases}$$

$(\mathscr{C}g)$ هو عبارة عن نصفي مستقيم.

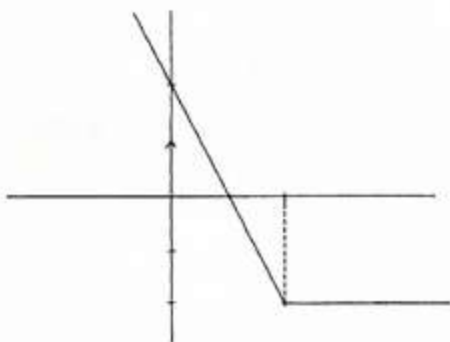


3 - لدينا
$$\begin{cases} h(x) = x - 2 - x & ; x \geqslant 2 \\ h(x) = -x + 2 - x & ; x \leqslant 2 \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} h(x) = -2 & ; x \geqslant 2 \\ h(x) = -2x + 2 & ; x \leqslant 2 \end{cases}$$

h دالة ثابتة على $[2 , +\infty[$ إذن $(\mathscr{C}_h)$ عبارة عن نصف مستقيم يوازي محور الأفاصيل.

وفي المجال $]-\infty , 2]$ $(\mathscr{C}_h)$ نصف مستقيم معادلته
$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ x \leqslant 2 \end{cases}$$



تمرين 20 :

نعتبر الدالة f المعرفة بـــ :

$$f(x) = \frac{1}{2}(|x+2| - |x-2|)$$

1 - حدد مجموعة تعريف الدالة f.

2 - أدرس زوجية الدالة f.

3 - بسط تعبير f في كل من المجالين

$I = [0 , 2]$ و $J = [2 , +\infty[$

4 - اعط جدول تغيرات f على D_f.

5 - ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f

a - هل النقط $A(2 , 2)$ و $B(1 , 2)$

و $C(3 , 5)$ و $D(3 , 2)$ تنتمي إلى المنحنى

$(\mathscr{C})$.

b - أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

الجواب :

1 - مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f = \mathbb{R}$

2 - لكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{1}{2}(|-x+2| - |-x-2|)$$
$$= \frac{1}{2}(|x-2| - |x+2|)$$
$$= -\frac{1}{2}(|x+2| - |x-2|)$$

إذن $f(-x) = -f(x)$

ومنه f دالة فردية

3 -

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}[x+2-(-(x-2))] & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ f(x) = \frac{1}{2}[x+2-(x-2)] & x \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}(x+2+x-2) & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ f(x) = \frac{1}{2}(x+2-x+2) & x \geqslant 2 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} f(x) = x & ; \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ f(x) = 2 & ; \quad x \geqslant 2 \end{cases}$$

4 - جدول تغيرات f

لدينا f ثابتة على المجال $[2 , +\infty[$ وتزايدية على $[0 , 2]$

وحيث أن f فردية فإنها ثابتة على $]-\infty , -2]$ وتزايدية على $[-2 , 0]$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
f(x)	→	-2	↗	2	→

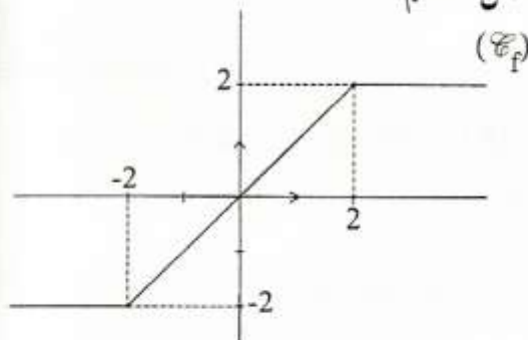
5 - a - لدينا $f(2) = 2$ إذن $A(2 , 2) \in (\mathscr{C})$

لدينا $f(1) = 1 \neq 2$ إذن $B(1 , 2) \notin (\mathscr{C})$

$f(3) = 2 \neq 5$ إذن $C(3 , 5) \notin (\mathscr{C})$

$f(3) = 2$ إذن $D(3 , 2) \in (\mathscr{C})$

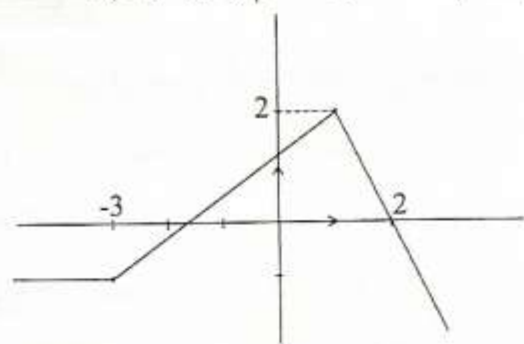
b - f دالة فردية إذن $(\mathscr{C}_f)$ مثماثل بالنسبة لأصل المعلم.



تمرين 21 :

لتكن f الدالة التي تمثيلها المبياني $(\mathscr{C})$ كالآتي

في معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.



حدد الدالة f.

الجواب :

1 - لدينا f ثابتة على المجال $]-\infty , -3]$

$f(x) = -1$;

في المجال $[-3 , 1]$ لدينا f عبارة عن دالة تآلفية

إذن $f(x) = ax + b$ لكل $x \in [-3 , 1]$

لدينا $\begin{cases} f(-3) = -1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$

يعني $\begin{cases} -3a + b = -1 \\ a + b = 2 \end{cases}$

يعني $\begin{cases} -3a + 2 - a = -1 \\ b = 2 - a \end{cases}$

يعني $\begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \end{cases}$

إذن $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ لكل $x \in [-3 , 1]$

في المجال $[1 , +\infty[$ لدينا

f تكتب على الشكل : $f(x) = ax + b$

ولدينا $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$

يعني $\begin{cases} a + b = 2 & ① \\ 2a + b = 0 & ② \end{cases}$

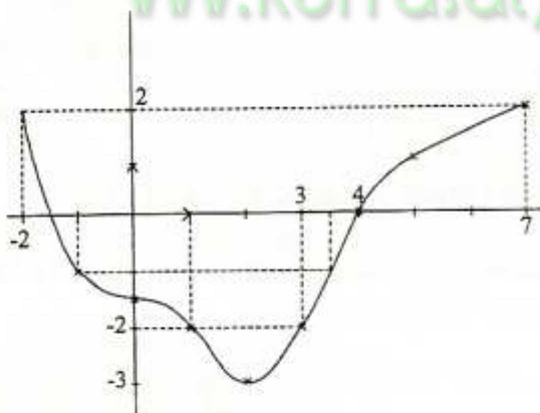
يعني $\begin{cases} b = 2 - a = 4 \\ a = -2 & ② - ① \end{cases}$

ومنه $f(x) = -2x + 4$ لكل $x \in [1 , +\infty[$

وبالتالي $\begin{cases} f(x) = -1 & ; x \leqslant -3 \\ f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} & ; -3 \leqslant x \leqslant 1 \\ f(x) = -2x + 4 & ; x \geqslant 1 \end{cases}$

تمرين 22 :

ليكن f المنحنى الممثل لـــ f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$



1 - حل مبيانيا المعادلات :

$f(x) = -1$; $f(x) = -2$; $f(x) = -3$

2 - حل مبيانيا المتراجحات :

$f(x) \geqslant 0$; $f(x) < -1$; $f(x) \geqslant -2$



الجواب :

1 - من خلال المبيان يتبين أن $(\mathscr{C}_f)$ يتقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم $y = -3$ مرة واحدة في النقطة ذات الأفصول 2 ومنه مجموعة حلول المعادلة $f(x) = -3$

$$S = \{2\}$$

- من خلال المبيان $(\mathscr{C}_f)$ يتقاطع مع المستقيم $y = -2$ في نقطتين افصوليهما على التوالي 3 ; 1 ومنه $S = \{1 , 3\}$

- من خلال المبيان $(\mathscr{C}_f)$ يتقاطع مع المستقيم $y = -1$ في نقطتين افصوليهما على التوالي : $-1 ; \frac{7}{2}$ ومنه $S = \{-1 , \frac{7}{2}\}$

2- $f(x) \geqslant -2$ يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه $(\mathscr{C}_f)$ فوق المستقيم الذي معادلته $y = -2$ إذن :

$$S = [-2 , 1] \cup [3 , 7]$$

. $f(x) < -1$ يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه $(\mathscr{C}_f)$ تحت المستقيم الذي معادلته $y = -1$ إذن :

$$S = [-1 , \frac{7}{2}]$$

. $f(x) \geqslant 0$ يعني $(\mathscr{C}_f)$ يوجد فوق محور الأفاصيل إذن :

$$S = [-2 , -\frac{3}{2}] \cup [4 , 7]$$

تمرين 23 :

1 - أنشئ في نفس المعلم المتعامد والممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنيين الممثلين للدالتين f وg حيث : $f(x) = x^2$ و $g(x) = x + 6$

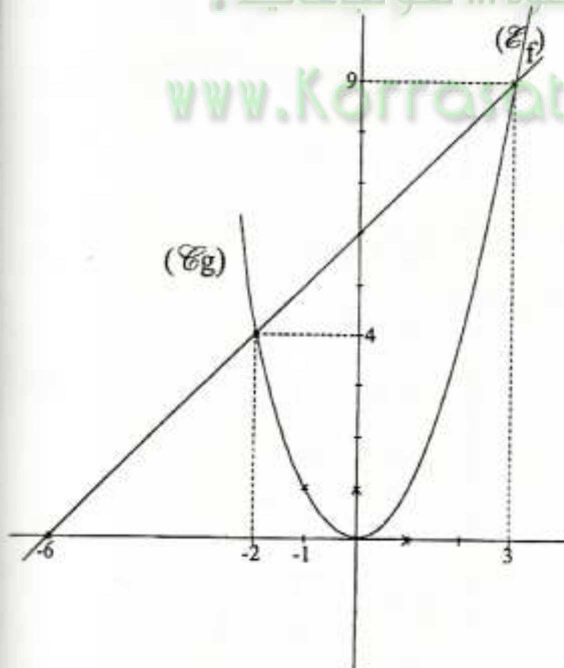
2 - حل المعادلة $x^2 = x + 6$

3 - استنتج مبيانيا حلول المتراجحة $x^2 - x - 6 < 0$ ثم تأكد من ذلك حسابيا.

الجواب :

1- $(\mathscr{C}_f)$ شلجم رأسه أصل المعلم وموجه نحو الأعلى

$(\mathscr{C}_f)$ عبارة عن مستقيم معادلته $y=x + 6$



2 - $x^2 = x + 6$ يعني $x^2 - x - 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4 ac$$
$$= 4 + 4 \times 6 = 25$$

إذن $x = \frac{1+5}{2} = 3$ أو $x = \frac{1-5}{2} = -2$

إذن $S = \{-2 , 3\}$

3 - $x^2 - x - 6 < 0$ يعني $x^2 < x + 6$

يعني $f(x) < g(x)$

يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه $(\mathscr{C}_f)$ تحت $(\mathscr{C}g)$

إذن $S = [-2 , 3]$

الجواب حسابيا :

x	$-\infty$	-2		4		$+\infty$
$x^2 - x - 6$	+	0	-	0	+	

وبالتالي : $S = [-2 , 3]$

تمرين 24 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر الدالتين f و g بحيث : $f(x) = 4x^2$ و $g(x) = \frac{1}{x}$

1- أرسم نقط $(\mathscr{C}_f)$ ذات الأفاصيل $0 , \frac{1}{4} , \frac{1}{2} , \frac{3}{4}$ ثم أنشئ $(\mathscr{C}_f)$.

- أرسم نقط $(\mathscr{C}g)$ ذات الأفاصيل $\frac{1}{4} , \frac{1}{2} , 1$ ثم أنشئ $(\mathscr{C}g)$. في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2- بين مبيانيا أن المعادلة $4x^2 - \frac{1}{x} = 0$ تقبل حلا وحيد.

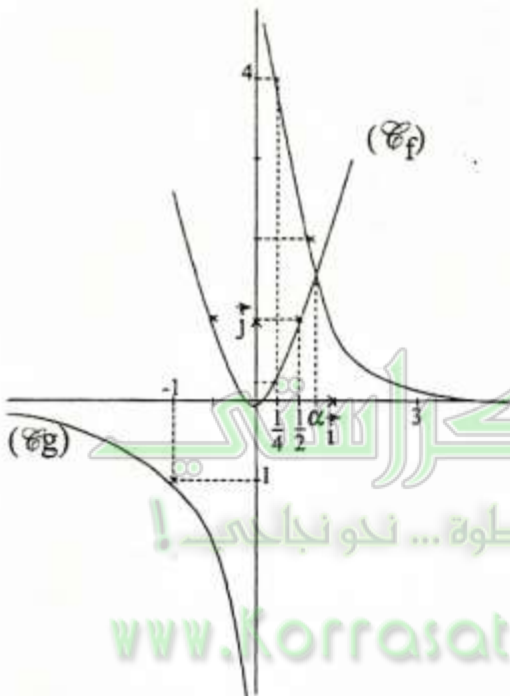
3 - استعمل المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و$(\mathscr{C}g)$ لحل المتراجحة $4x^2 - \frac{1}{x} < 0$, $x \in \mathbb{R}^*$

الجواب :

1 - لدينا

* $f(0) = 0$; $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$; $f(\frac{1}{2}) = 1$
; $f(\frac{3}{4}) = \frac{9}{4}$

* $g(\frac{1}{4}) = 4$; $g(\frac{1}{2}) = 2$; $g(0) = 0$



2 - $4x^2 - \frac{1}{x} = 0$ تكافئ $4x^2 = \frac{1}{x}$

يعني $f(x) = g(x)$

يعني x أفصول لنقطة تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ و$(\mathscr{C}g)$

وبما أن $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}g)$ يتقاطعان في نقطة وحيدة فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا α.

3 - $4x^2 - \frac{1}{x} < 0$ يعني $4x^2 < \frac{1}{x}$

يعني $f(x) < g(x)$

يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه $(\mathscr{C}_f)$ تحت $(\mathscr{C}g)$

إذن $S =]0 , \alpha[$





تمرين 1 :

حدد مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة :

1 - $f(x) = \dfrac{1}{4x^2 - 9}$

2 - $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-5}}$

3 - $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x^2 - 2x}$

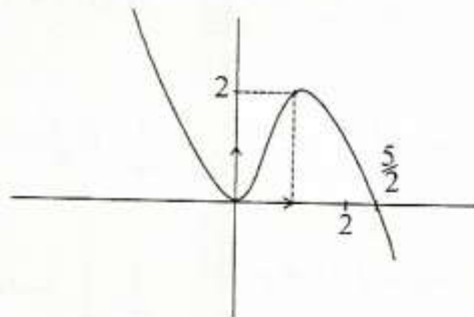
4 - $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-5}}$

5 - $\begin{cases} f(x) = \sqrt{4 - x^2}\ ; x \leq 2 \\ f(x) = \dfrac{2x}{x-2}\ ; x > 2 \end{cases}$

6 - $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - 3x$

تمرين 2 :

f الدالة التي تمثيلها المبياني كالآتي :



1 - اعط جدول تغيرات f

2 - حل مبيانيا المعادلة $f(x) = 0$

3 - حل مبيانيا المتراجحة $f(x) < 0$

تمرين 3 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـــ : $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$



1 - بين أن f تقبل قيمة دنيا في $x_0 = \frac{1}{3}$

2 - احسب معدل تغيرات f.

3 - أدرس تغيرات f على $\left]-\infty , \frac{1}{3}\right]$ و $\left[\frac{1}{3} , +\infty\right[$

4 - اعط جدول تغيرات f.

تمرين 4 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـــ : $f(x) = \frac{x}{2x - 1}$

1 - حدد مجموعة التعريف D_f

2 - احسب معدل تغيرات f.

3 - أدرس تغيرات f على $\left]\frac{1}{2} , +\infty\right[$ و $\left]-\infty , \frac{1}{2}\right[$

4 - اعط جدول تغيرات f.

تمرين 5 :

نعتبر الدالة f المعرفة بـــ : $f(x) = \frac{x}{|x| - 2}$

1 - حدد مجموعة التعريف

2 - أدرس زوجية الدالة f.

3 - حدد مجموعة الدراسة D_E

4 - أدرس تغيرات f على $[0 , 2[$ ثم على $]2 , +\infty[$

5 - استنتج تغيرات f على $]-2 , 0]$ و $]-\infty , 2[$.

6 - اعط جدول تغيرات f.

تمرين 6 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بـــ :

fدالة زوجية و $\begin{cases} f(x) = x - 1 \quad ; \quad x \geqslant 1 \\ f(x) = -x + 1 \; ; \; 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

1 - أحسب $f(1) , f(2) , f(\frac{1}{2}) , f(-1) , f(-3)$



2 - أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$

3 - اعط جدول تغيرات f ثم استنتج قيم f الدنيا والقصوى.

تمرين 7 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـــ : $f(x) = x^2 - \frac{3}{|x|}$

1 - حدد مجموعة تعريف f ثم أدرس زوجية f.

2 - حدد مجموعة الدراسة D_E

3 - بين أنه لكل x و y من D_E بحيث $x \neq y$ لدينا :

$$f(x) - f(y) = (x - y)\left((x + y) + \frac{3}{x\,y}\right)$$

4 - أدرس تغيرات f على $]0 , +\infty[$ ثم استنتج تغيرات f على $]-\infty , 0[$.

تمرين 8 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـــ : $f(x) = 3x^2 - x - 2$

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لـــ f في معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - حدد نقطة تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع محوري المعلم.

2 - هل النقط $A(2 , 8)$, $B(3 , 5)$, $C(-1 , 2)$ تنتمي إلى $(\mathscr{C})$.

تمرين 9 :

أنشئ منحنى الدالة f في كل حالة :

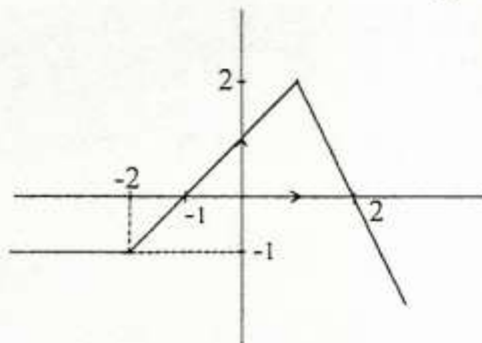
1) $f(x) = |3x - 2|$

2) $f(x) = 2x + 1 + |x - 2|$



تمرين 10 :

لتكن f الدالة التي منحناها كالآتي :



حدد الدالة f.

تمرين 11 :

f دالة عددية معرفة بـــ : $f(x) = x^3 - 3x^2$

1 - احسب معدل تغيرات f.

2 - بين f تزايدية على $]-\infty , 0]$ و $[2 , +\infty[$ وتناقصية على $[0 , 2]$

3 - اعط جدول تغيرات f.

تمرين 12 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بـــ : $f(x) = -1 + \sqrt{x^2 - 4}$

1 - حدد مجموعة تعريف f على D_f .

2 - بين أن لكل a و b من D_f حيث $a \neq b$ لدينا $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{-(a+b)}{\sqrt{4 - a^2} + \sqrt{4 - b^2}}$

3 - أدرس تغيرات الدالة f على D_f .



الدوال العددية 2

- عدد الصفحات : [35]
- عدد التمارين : [18]
- عدد تمارين البحث : [10]

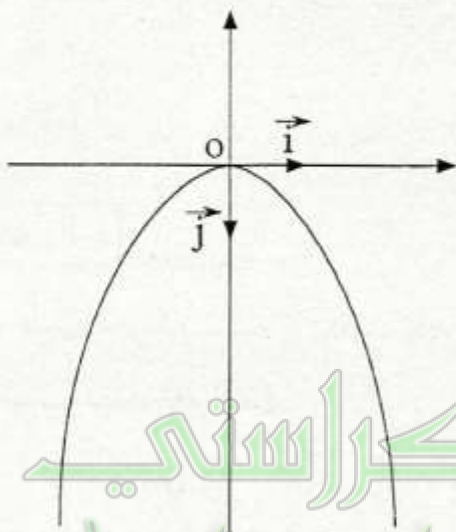


12 الدوال العددية (2)

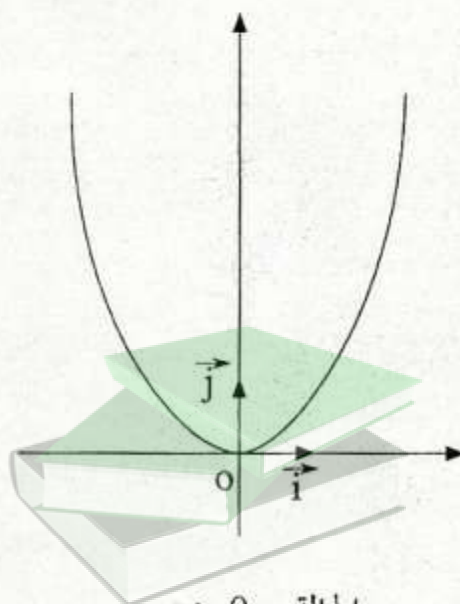
1 ـ تذكير :

1 – الدالة : $f : x \longrightarrow ax^2$, $a \neq 0$: $a \neq 0$ $a \in \mathbb{R}$

منحنى الدالة f يسمى شلجما رأسه O ومحور تماثله هو محور الاراتيب $(x = 0)$



الحالة : $a < 0$



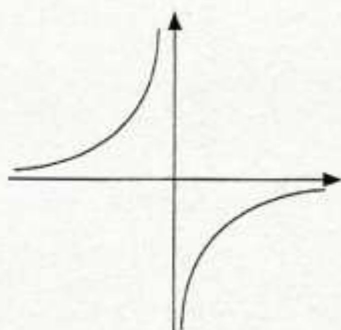
الحالة : $a > 0$

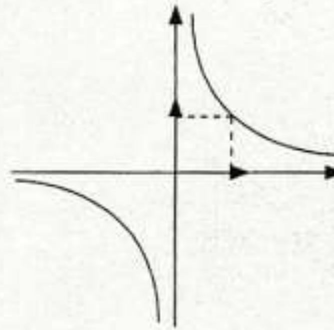
x	$-\infty$	0	$+\infty$
ax^2	↗	0	↘

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ax^2	↘	0	↗

1 – الدالة : $f : x \longrightarrow \frac{a}{x}$ $a \in \mathbb{R}^*$

منحنى الدالة f يسمى هذلولا مركزه o ومقارباه هما المستقيمان $x = 0$ و $y = 0$







الحالة : $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↘	‖	↘

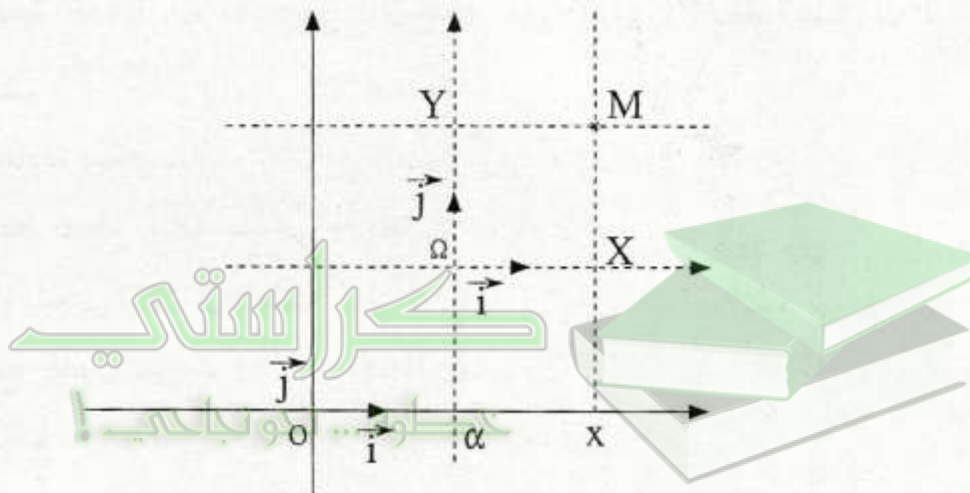
الحالة : $a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↗	‖	↗

2 - الدالتين : $ax^2 + bx + c$ و $x \longrightarrow \dfrac{ax+b}{cx+d}$

نعتبر $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ معلمين بحيث $\Omega(\alpha, \beta)$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر $M(x, y)$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و $M(X, Y)$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$



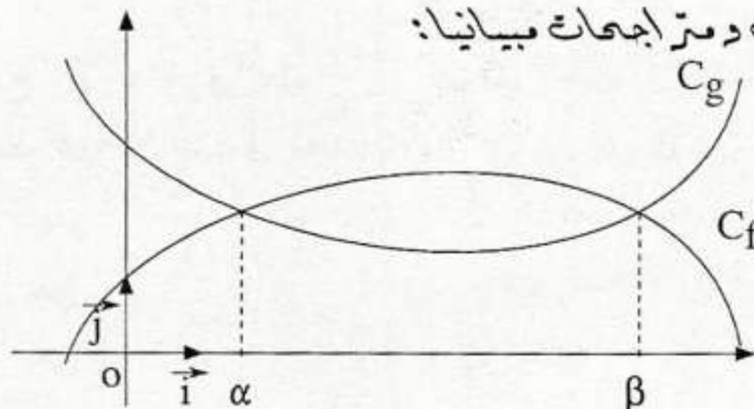
لدينا :

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y + \beta \end{cases}$$

* إذا كانت $f(x) = ax^2 + bx + c$ فإن منحنى f في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ يكون شلجما معادلته $Y = aX^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

* إذا كانت $c \neq 0$ و $(a \neq 0$ أو $b \neq 0)$ و $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ فإن منحنى f في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ يكون هذلولا معادلته $Y = \dfrac{k}{X}$

3 - حل معادلات و متراجحات مبيانيا:





* حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g)
* حلول المتراجحة $f(x) \leqslant g(x)$ مثلا هي أفاصيل نقط المستوى (P) التي يكون (C_f) تحت (C_g)

تمارين وحلولها

تمرين 1 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = -x^2 + 2$ و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد وممنظم $(O , \vec{i} , \vec{j})$ و $\Omega(0, 2)$

1 - حدد معادلة ديكارتية لــ $(\mathscr{C})$ في المعلم $(\Omega , \vec{i} , \vec{j})$

أ – حدد نقط تقاطع $(\mathscr{C})$ مع محوري المعلم.

ب – أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم $(O, \vec{i} , \vec{j})$

ج – استنتج جدول تغيرات f

3 - حل مبيانيا المتراجحتين $f(x) \geqslant 0$ و $f(x) < 1$

الجواب :

1 - معادلة المنحنى (C_f) في المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$ هي $y = f(x)$

يعني $y = -x^2 + 2$

يعني $y - 2 = -x^2$

نضع $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 2 \end{cases}$

معادلة (C_f) تصبح $Y = -X^2$ في المعلم $(\Omega , \vec{i} , \vec{j})$ حيث $\Omega(0, 2)$

2 - أ – (C_f) يقطع محور الأراتيب في $I(0, f(0))$ أي $\Omega(0, 2)$

$f(x) = 0$ يعني $-x^2 + 2 = 0$

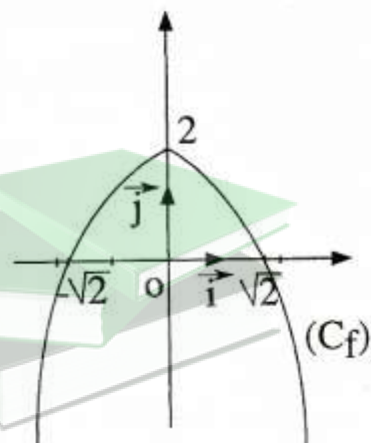
يعني $x^2 = 2$

يعني $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$

ومنه (C_f) يقطع محور الأفاصيل في $A(\sqrt{2}, 0)$ و $B(-\sqrt{2}, 0)$

ب – معادلة (C_f) هي $Y = -X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ إذن (C_f) عبارة عن شلجم رأسه Ω موجه نحو الأسفل

يمكن الوصول لهذه النتيجة كالآتي (C_f) شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ أي $\Omega(0, 2)$ موجه نحو الأسفل.



ج – جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↗	2	↘

3 - $f(x) \geqslant 0$ يعني x توجد في المجال الذي يكون فيه (C_f) فوق محور الأفاصيل

$S = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$f(x) < 0$ يعني x توجد في المجال الذي يكون فيه (C_f) تحت محور الأفاصيل إذن :

$S =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

تمرين 2 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x^2 - 2x$$

(C) منحنى الدالة f في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و $\Omega(1, -1)$

1 - حدد معادلة ديكارتية لـ (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

2 - أ - حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

ب – أنشئ (C_f) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

3 - حل مبيانيا المتراجحتين :

$f(x) \leqslant 0$ و $f(x) \geqslant 3$

الجواب :

1 - معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي : $y = f(x)$

يعني $y = x^2 - 2x$

يعني $y + 1 = x^2 - 2x + 1$

يعني $y + 1 = (x - 1)^2$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 1 \end{cases}$

معادلة (C_f) في المعلم هي $Y = X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(1, -1)$

2 - أ– نقطة تقاطع $(\mathscr{E})$ مع محور الأراتيب هي $O(0, f(0))$ أي $O(0, 0)$

$f(x) = 0$ أي $x^2 - 2x = 0$

يعني $x(x - 2) = x$

يعني $x = 0$ أو $x = 2$

إذن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في :

$O(0,0)$ و $A(2,0)$

ب – معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

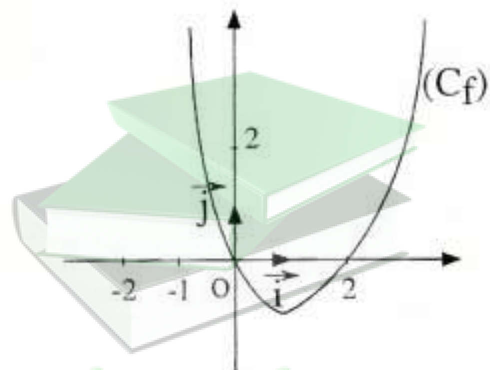
هي : $Y = X^2$

إذن $(\mathscr{C})$ شلجم رأسه Ω وموجه نحو الأعلى

<u>طريقة 2</u> :

(C_f) شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a})\right)$ أي

$\Omega(1, -1)$ موجه نحو الأعلى.



3 - $f(x) \leqslant 0$ يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه (C_f) تحت محور الأفاصيل

إذن $S = [0, 2]$

$f(x) \geqslant 0$ يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه (C_f) فوق محور الأفاصيل

$S =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

تمرين 3 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بـــ :

$f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

ليكن (C) منحنى الدالة f في المعلم المتعامد والممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و $\Omega(1, 1)$

1 - حدد معادلة ديكارتية لـــ (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

2 - أ – حدد تقاطع (C) مع محوري المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ب – أنشئ (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3 - اعط جدول تغيرات f

4 - حل مبيانيا المتراجحة $f(x) \leqslant 0$

5 - حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ حيث m بارامتري حقيقي.

الجواب :

1 - معادلة (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$y = f(x)$

يعني : $y = 2x^2 - 4x + 3$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 1 \end{cases}$

المعادلة في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(1, 1)$ تكافئ

$Y + 1 = 2(X+1)^2 - 4(X+1) + 3$

يعني

$Y + 1 = 2(X^2 + 2X + 1) - 4X - 4 + 3$

$Y + 1 = 2X^2 + 4X + 2 - 4X - 4 + 3$

$Y + 1 = 2X^2 + 1$

$Y = 2X^2$

معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ هي $Y = 2X^2$

2 - أ- نقط تقاطع C_f ومحور الأراتيب هي:

$A(0, f(0))$ أي أن $A(0, 3)$

لتحديد نقط تقاطع (C_f) ومحور الأفاصيل نحل المعادلة :

$2x^2 - 4x + 3 = 0$

$= 16 - 4\ 2\ 3$

$= -8 < 0$

إذن (C_f) لا يقطع محور الأفاصيل

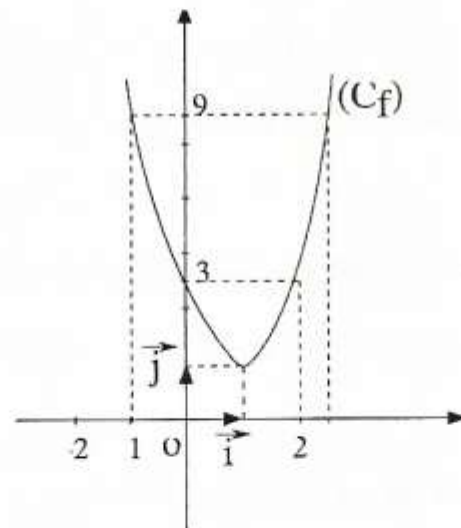
ج − (C_f) شلجم رأسه $\Omega(1,1)$ ومحور تماثله المستقيم ذو المعادلة $x = 1$

طريقة 2 :

(C_f) شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ أي $\Omega(1, -1)$.

لدينا

x	-1	0	1	2	3
f(x)	9	3	1	3	9



3 - جدول تغيرات f من خلال المنحنى

x	-∞	1	+∞
f(x)	↘	1	↗

4 - لدينا $f(x) \leqslant 0$ يعني x يوجد في المجالات التي يكون فيها (C) تحت محور الأفاصيل.

وبما أن (C) يوجد فوق محور الأفاصيل

فإن $S = \phi$

5 - لدينا : $f(x) = m$ يعني x أفصول نقطة تقاطع (C) مع المستقيم $y = m$ (Δ)

إذا كان $m = 1$ هناك حل وحيد وهو $x = 1$ لأن (Δ) يقطع (C) مرة واحدة.

إذا كان $m < 1$ ليس هناك حل لأن (C) و(Δ) لا يتقاطعان.

إذا كان $m > 1$ هناك حلين مختلفين لأن (Δ) يقطع (C) مرتين.

تمرين 4 :

لتكن الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$f(x) = -2x^2 + 2x - 1$

و (C) تمثيلها المبياني في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

و $\Omega\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

1 - حدد معادلة ديكارتية لـ (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

2 - أنشئ (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3 - نعتبر الدالة g المعرفة بـ :

$g(x) = 2x - 3$

أ – أنشئ (C') منحنى g في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ب – حل مبياينا المتراجحة $g(x) \leq f(x)$

الجواب :

1 - معادلة (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي $y = f(x)$

يعني $y = -2x^2 + 2x - 1$

لدينا $\Omega(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

نضع
$$\begin{cases} X = x - \frac{1}{2} \\ Y = y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

يعني
$$\begin{cases} x = X + \frac{1}{2} \\ y = Y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

معادلة (C) تكافئ

$$Y - \frac{1}{2} = -2(X + \frac{1}{2})^2 + 2(X + \frac{1}{2}) - 1$$

$$Y - \frac{1}{2} = -2(X^2 + X + \frac{1}{4}) + 2X + 1 - 1$$

يعني $Y - \frac{1}{2} = -2X^2 - 2X - \frac{1}{2} + 2X$

يعني $Y = -2X^2$

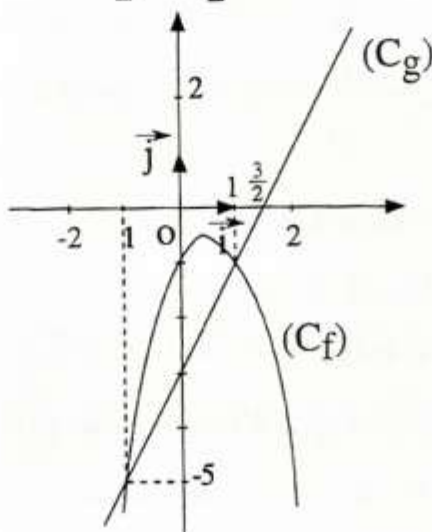
إذن معادلة (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

هي $Y = -2X^2$

2 - معادلة (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ هي $Y = -2X^2$ إذن (C) شلجم رأسه Ω وموجه نحو الأسفل

طريقة 2 :

(C_f) شلجم رأسه $\Omega(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$



3 - أ – (C') مستقيم معادلته $y = 2x - 3$

ب – $g(x) \leq f(x)$ يعني x توجد في المجال الذي يكون فيه (C') تحت (C) إذن

$S = [-1, \frac{3}{2}]$

تمرين 5 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـــ :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - حدد نقط تقاطع (C) مع محور الأفاصيل

2 - تحقق أن : $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 2$

لكل $x \in \mathbb{R}$

3 - أ – بين أنه لكل x_1 و x_2 من $\mathbb{R}$ بحيث $x_1 \neq x_2$: لدينا

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4)$$

ب – استنتج رتابة الدالة f على المجالين

$]-\infty , -2]$ و $[-2 , +\infty[$

4 - لتكن $\Omega(-2, -2)$ نقط من المستوى (P).

بين أن معادلة (C) هي $Y = \frac{1}{2}X^2$ في المعلم $(\Omega , \vec{i} , \vec{j})$

5 - أنشئ المنحنى (C)

6 - حل مبيانيا المتراجحة $x^2 + 4x > 0$

الجواب :

1 - لدينا $f(x) = 0$ يعني $\frac{1}{2}x^2 + 2x = 0$

يعني $x(\frac{1}{2}x + 2) = 0$

يعني $x = 0$ أو $\frac{1}{2}x + 2 = 0$

يعني $x = 0$ أو $x = -4$

إذن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في

$O(0 , 0)$ و $A(-4 , 0)$

2 - لدينا

$$\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 2 = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) - 2$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 - 2$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x = f(x)$$

وبالتالي : $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 2$

3 - أ – ليكن x_1 و x_2 من $\mathbb{R}$ بحيث $x_1 \neq x_2$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(x_1 + 2)^2 - 2 - \frac{1}{2}(x_2 + 2)^2 + 2}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(x_1 + 2 - x_2 - 2)(x_1 + 2 + x_2 + 2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 4)}{2(x_1 - x_2)}$$

وبالتالي :

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4)$$

ب – في المجال $]-\infty , -2]$

لدينا $\begin{cases} x_1 \leqslant -2 \\ x_2 \leqslant -2 \end{cases}$ إذن

$x_1 + x_2 \leqslant -4$

يعني $x_1 + x_2 + 4 \leqslant 0$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4) \leqslant 0$$

إذن f تناقصية على $]-\infty , -2]$

في المجال $[-2 , +\infty[$

لدينا $\begin{cases} x_1 \geqslant -2 \\ x_2 \geqslant -2 \end{cases}$ إذن

$x_1 + x_2 \geqslant -4$

إذن $x_1 + x_2 + 4 \geqslant 0$

ومنه $\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4) \geqslant 0$

أي $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geqslant 0$

إذن f تزايدية على $[-2 , +\infty[$

4 - معادلة (C) في المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

هي $y = f(x)$

يعني $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$

يعني $y + 2 = \frac{1}{2}(x+2)^2$

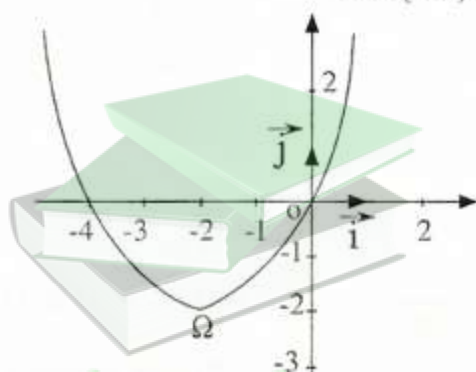
نضع $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y + 2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \frac{1}{2}X^2$

في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(-2, -2)$

5 - (C_f) شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ أي $\Omega(-2, -2)$.

5 -



6 -

$x^2 + 4x > 0$ يعني $\frac{1}{2}(x^2 + 4x) > 0$

يعني $\frac{1}{2}x^2 + 2x > 0$

يعني $f(x) > 0$

يعني x توجد في المجال الذي يكون فيه (C) فوق محور الأفاصيل

إذن $S =]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$

تمرين 6:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x - 1}$$

1 - حدد مجموعة التعريف D_f

2 - بين أن :

$f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$ لكل $x \in D_f$

3 - حدد طبيعة المنحنى (C_f). حيث (C_f) منحنى f في معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4 - أنشئ المنحنى (C_f)

5 - اعط جدول تغيرات f

الجواب :

1 - لدينا $x \in D_f$ $\quad x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

إذن $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2 - لدينا

$$2 + \frac{1}{x-1} = \frac{2x - 2 + 1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1} = f(x)$$

$f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$ لكل $x \in D_f$

3 - معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$y = f(x)$

$y = 2 + \frac{1}{x-1}$

$y - 2 = \frac{1}{x-1}$

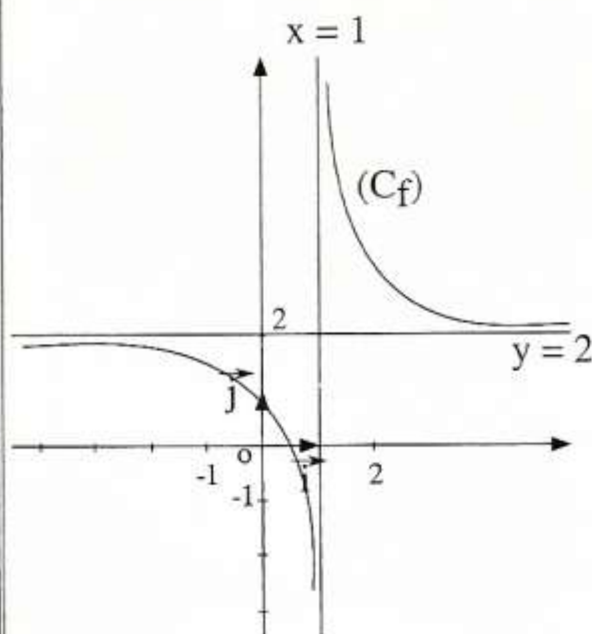
نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \frac{1}{X}$

في المعادلة $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(1, 2)$

4 - المنحنى (C_f) هذلول مركزه $\Omega\left(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}\right)$

$\Omega(1, 2)$ ومقارباه المستقيمان $x = 1$ و $y = 2$



5 - من خلال منحنى الدالة f فإن جدول التغيرات هو :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)	↘	‖	↘

تمرين 7 :

لتكن الدالتين f و g المعرفتين بما يلي :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-2} \qquad g(x) = \frac{-x+2}{x-1}$$

1 - حدد مجموعة تعريف كل من الدالتين f و g

2 - اعط جدول تغيرات كل من f و g.

3 - حدد طبيعة كل من المنحنيين (C_f) و (C_g)

4 - أ – حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ب – حدد نقط تقاطع (C_g) مع محوري المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

5 - أنشئ (C_f) و (C_g) في معلمين مختلفين.

الجواب :

1 - لدينا $x \in D_f$ يعني $x - 2 \neq 0$

$x \neq 2$

إذن $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

لدينا $x \in D_g$ يعني $x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

إذن $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

2 - تغيرات f

ليكن x و y من D_f بحيث $x \neq y$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \left(\frac{2x+3}{x-2} - \frac{2y+3}{y-2}\right) \times \frac{1}{x-y}$$

$$= \left(\frac{2xy-4x+3y-6-2xy-3x+4y+6}{(x-2)(y-2)}\right) \times \frac{1}{x-y}$$

$$= \frac{-7x+7y}{(x-2)(y-2)(x-y)}$$

$$= \frac{-7(x-y)}{(x-2)(y-2)(x-y)}$$

إذن $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = \dfrac{-7}{(x-2)(y-2)}$

في المجال $]2, +\infty[$

لدينا $\begin{cases} x > -2 \\ y > -2 \end{cases}$ إذن

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ y - 2 > 0 \end{cases}$$

$$(x-2)(y-2) > 0$$
$$\frac{-7}{(x-2)(y-2)} < 0$$

ومنه f تناقصية على $]2, +\infty[$

في المجال $]-\infty, 2[$

لدينا $\begin{cases} x < 2 \\ y < 2 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x-2 < 0 \\ y-2 < 0 \end{cases}$

إذن $(x-2)(y-2) > 0$

$$\frac{-7}{(x-2)(y-2)} < 0$$

إذن f تناقصية على $]-\infty, 2[$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f(x)	↘	‖	↘

تغيرات g :

ليكن x و y من Dg بحيث $x \neq y$

$$\frac{g(x)-g(y)}{x-y} = \left(\frac{-x+2}{x-1} - \frac{-y+2}{y-1}\right) \times \frac{1}{x-y}$$
$$= \frac{(-x+2)(y-1) - (x-1)(-y+2)}{(x-1)(y-1)} \times \frac{1}{x-y}$$
$$= \frac{-xy+x+2y-2+xy-2x-y+2}{(x-1)(y-1)} \times \frac{1}{x-y}$$
$$= \frac{-x+y}{(x-1)(y-1)} \times \frac{1}{x-y}$$
$$= \frac{-(x-y)}{(x-1)(y-1)} \times \frac{1}{x-y}$$

$$\frac{g(x)-g(y)}{x-y} = \frac{-1}{(x-1)(y-1)}$$

في المجال $]1, +\infty[$

لدينا $\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x-1 > 0 \\ y-1 > 0 \end{cases}$

ومنه $(x-1)(y-1) > 0$

إذن $\frac{-1}{(x-1)(y-1)} < 0$

وبالتالي g تناقصية على $]1, +\infty[$

في المجال $]-\infty, 1[$

لدينا $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x-1 < 0 \\ y-1 < 0 \end{cases}$

ومنه $(x-1)(y-1) > 0$

إذن $\frac{-1}{(x-1)(y-1)} < 0$

وبالتالي g تناقصية على $]-\infty, 1[$

جدول تغيرات g هو :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g(x)	↘	‖	↘

3 - معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $y = f(x)$

يعني $y = \frac{2x+3}{x-2}$

يعني $y = \frac{2(x-2)+7}{x-2}$



يعني $y = \frac{2(x-2)}{x-2} + \frac{7}{x-2}$

يعني $y = 2 + \frac{7}{x-2}$

يعني $y - 2 = \frac{7}{x-2}$

نضع $\begin{cases} X = x-2 \\ Y = y-2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \frac{7}{X}$ في المعلم $(A, \vec{i}, \vec{j})$
حيث $A(2, 2)$

وبالتالي (C_f) هذلول مركزه A ومقارباه

المستقيمان $x = 2$ و $y = 2$

طريقة 2 :

(C_f) هذلول مركزه $A(2, \frac{2}{1})$ ومقارباه

$x = 2$ و $y = 2$

معادلة (C_g) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي

$y = g(x)$

يعني $y = \frac{-x+2}{x-1}$

يعني $y = \frac{-(x-1)+1}{x-1}$

يعني $y = \frac{-(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1}$

يعني $y = -1 + \frac{1}{x-1}$

يعني $y + 1 = \frac{1}{x-1}$

المعادلة تصبح $Y = \frac{1}{X}$ في المعلم $(B, \vec{i}, \vec{j})$
حيث $B(1, -1)$

إذن (C_g) هذلول مركزه $B(1, -1)$ ومقارباه

المستقيمان $x = 1$ و $y = -1$

أو مباشرة (C_g) هذلول مركزه $\Omega(1, -\frac{1}{1})$

مقارباه $x = 1$ أو $y = -1$

4 - أ – نقط تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل

$f(x) = 0$ يعني $\frac{2x+3}{x-2} = 0$

يعني $2x + 3 = 0$

يعني $x = -\frac{3}{2}$

إذن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في $I(-\frac{3}{2}, 0)$

(C_f) يقطع محور الأراتيب في : $J(0, f(0))$

أي $J(0, -\frac{3}{2})$

ب – نقط تقاطع (C_g) مع محور الأفاصيل

$g(x) = 0$ يعني $\frac{-x+2}{x-1} = 0$

يعني $-x + 2 = 0$

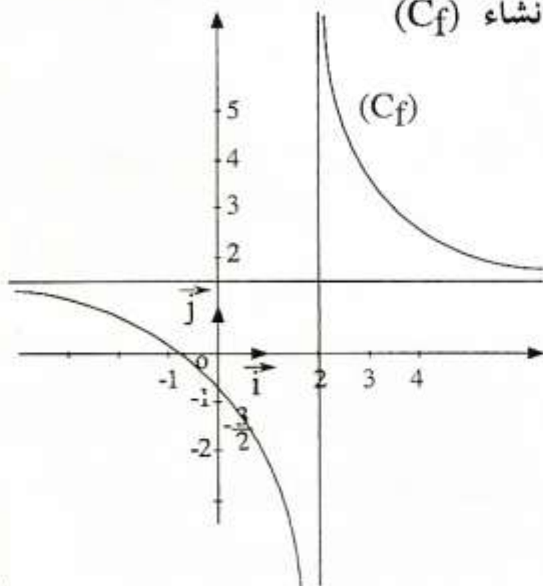
يعني $x = 2$

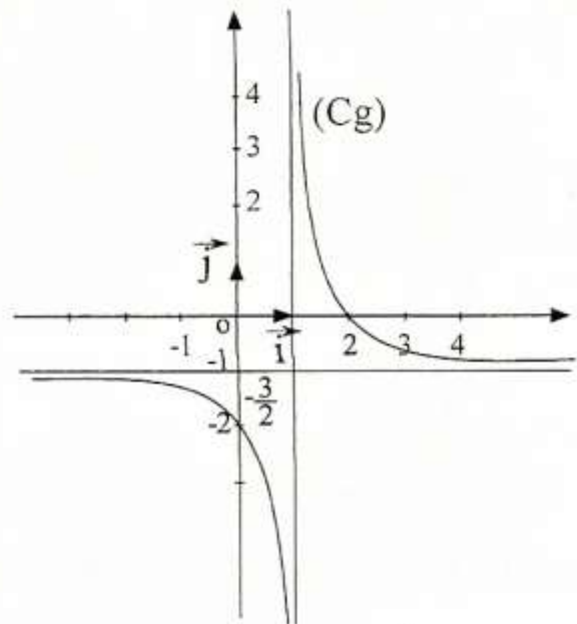
إذن (C_g) يقطع محور الأفاصيل في $I'(2, 0)$

(C_g) يقطع محور الأراتيب في $J'(0, g(0))$

أي $J'(0, -2)$

5 - انشاء (C_f)





تمرين 8 :

لتكن الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بمايلي :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x}$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - حدد Df مجموعة تعريف الدالة f

2 - أدرس تغيرات f على المجال $]0, +\infty[$

3 - ليكن $\Omega(1, 2)$ نقطة في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ – بين أن معادلة (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $Y = \frac{3}{X}$

ب – أنشئ (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

الجواب :

1 - لدينا $x \in D_f$ يعني $x \neq 0$

إذن $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

2 - ليكن x و y من $]0, +\infty[$ بحيث $x \neq y$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x-y} = \frac{\frac{2x+3}{x} - \frac{2y+3}{y}}{x-y}$$

$$= \frac{2xy + 3y - 2xy - 3x}{xy} \times \frac{1}{x-y}$$

$$= \frac{-3(x-y)}{xy} \times \frac{1}{x-y}$$

إذن $\frac{f(x) - f(y)}{x-y} = \frac{-3}{xy}$

لكل x و y من $]0, +\infty[$ لدينا $xy > 0$

إذن $\frac{-3}{xy} < 0$

وبالتالي f تناقصية على $]0, +\infty[$

3 - أ – معادلة (Cf) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $y = f(x)$

يعني $y = \frac{2x+3}{x}$

يعني $y = \frac{2x}{x} + \frac{3}{x}$

يعني $y = 2 + \frac{3}{x}$

يعني $y - 2 = \frac{3}{x}$

نضع $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 2 \end{cases}$

إذن معادلة تصبح $Y = \frac{3}{X}$

في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(0, 2)$

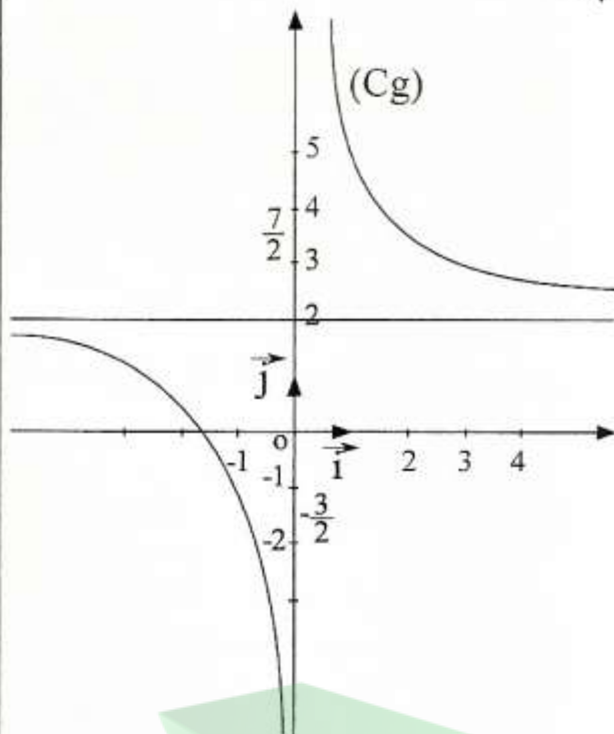
ب – المنحنى (Cf) هذلول مركزه Ω ومقارباه المستقيمان $x = 0$ و $y = 2$

طريقة 2 :

(Cf) هذلول مركزه $\Omega(0, \frac{2}{1})$ ومقارباه

$x = 0$ و $y = 2$

ب –



تمرين 9 :

لتكن الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة

بـ : $f(x) = \frac{2x}{x+2}$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - حدد مجموعة التعريف Df وتحقق أن لكل x من Df :

$$f(x) = 2 - \frac{4}{x+2}$$

2 - أدرس تغيرات f على المجال $]-2, +\infty[$

3 - ليكن $\Omega(-2, 2)$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ – بين أن معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $Y = -\frac{4}{X}$

ب – أنشئ (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

الجواب :

1 - $x \in D_f$ يعني $x + 2 \neq 0$

يعني $x \neq -2$

إذن $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

لدينا

$$2 - \frac{4}{x+2} = \frac{2x+4-4}{x+2} = \frac{2x}{x+2} = f(x)$$

ومنه $f(x) = 2 - \frac{4}{x+2}$ لكل x من Df.

2 - ليكن x و y من $]-2, +\infty[$ بحيث $x \neq y$ لدينا :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{2-\frac{4}{x+2} - 2 + \frac{4}{y+2}}{x-y}$$

$$= \frac{\frac{-4(y+2)+4(x+2)}{(x+2)(y+2)}}{x-y}$$

$$= \frac{-4y-8+4x+8}{(x+2)(y+2)} \times \frac{1}{x-y}$$

$$= \frac{4(x-y)}{(x+2)(y+2)} \times \frac{1}{x-y}$$

إذن $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{4}{(x+2)(y+2)}$

لدينا $\begin{cases} x > -2 \\ y > -2 \end{cases}$ إذن

$\begin{cases} x+2 > 0 \\ y+2 > 0 \end{cases}$

إذن $(x+2)(y+2) > 0$ ومنه



$$\frac{4}{(x+2)(y+2)} > 0$$

ومنه f تزايدية قطعا على $]-2\,,+\infty[$

3 - أ – معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $y = f(x)$

$$y = 2 - \frac{4}{x+2}$$

$$y - 2 = \frac{-4}{x+2}$$

نضع $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = -\frac{4}{X}$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega\,(2\,,2)$

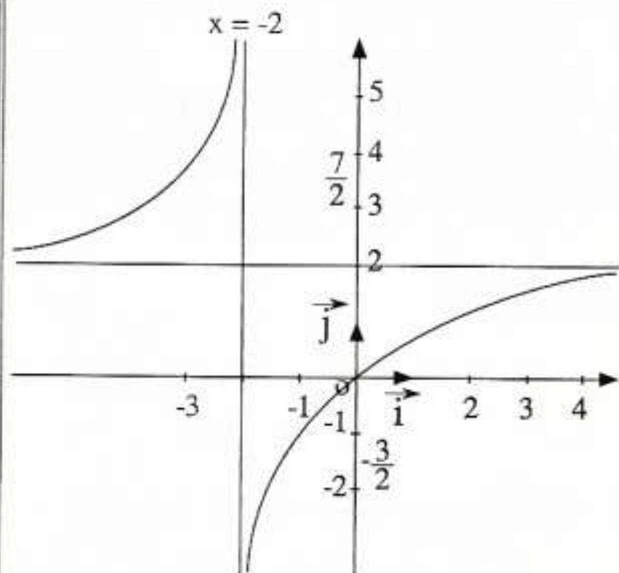
ب – (C_f) عبارة عن هذلول مركزه Ω

ومقارباه لمستقيمان $x = -2$ و $y = 2$

طريقة 2 :

(C_f) هذلول مركزه $\Omega\,(-\frac{d}{c}\,,\frac{a}{c})$ أي

$\Omega\,(-2\,,2)$ ومقارباه $x = -2$ و $y = 2$



تمرين 10:

لتكن الدالة f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x\,|x| - 2x + 2$$

1 - أ – بين أن لكل x من $\mathbb{R}^+$ لدينا :

$$f(x) = (x-1)^2 + 1$$

ب – بين أن لكل x من $\mathbb{R}^-$ لدينا :

$$f(x) = -(x+1)^2 + 3$$

2 - أنشئ (C_f) منحى الدالة f في معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3 - حل مبيانيا المعادلة : $f(x) = m$ حيث $m \in \mathbb{R}$

4 - حل مبيانيا المعادلة : $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$

الجواب :

1 - أ – ليكن $x \in \mathbb{R}^+$ إذن : $|x| = x$

لدينا $f(x) = x\,|x| - 2x + 2$

$= x^2 - 2x + 1 + 1$

إذن $f(x) = (x-1)^2 + 1$

ب – ليكن $x \in \mathbb{R}^-$ لدينا : $|x| = -x$

لدينا $f(x) = x\,|x| - 2x + 2$

$= x\,(-x) - 2x + 2$

$= -x^2 - 2x - 1 + 3$

إذن $f(x) = -(x+1)^2 + 3$

2 - في $\mathbb{R}^+$ لدينا معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $y = f(x)$

يعني $y = (x-1)^2 + 1$

يعني $y - 1 = (x-1)^2$

نضع
$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$$

معادلة تصبح $Y = X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega(1, 1)$

في $\mathbb{R}^+$ إذن (C_f) جزء من الشلجم الذي

معادلته $Y = X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

في $\mathbb{R}^-$ لدينا معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $y = f(x)$

$$y = -(x+1)^2 + 3$$

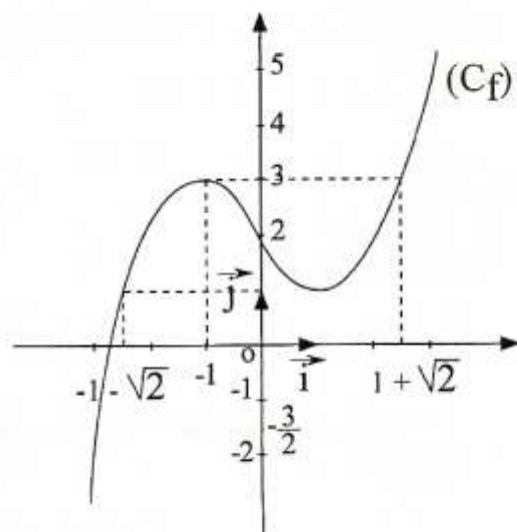
$$y - 3 = -(x+1)^2$$

نضع
$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 3 \end{cases}$$

معادلة (C_f) تصبح $Y = -X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega'(-1, 3)$

إذن في $\mathbb{R}^-$ (C_f) جزء من شلجم معادلته

$Y = -X^2$ في المعلم $(\Omega', \vec{i}, \vec{j})$



3 - $f(x) = m$ يعني x أفصول لنقطة تقاطع (C_f) والمستقيم $y = m$

إذن عدد نقط تقاطع (C_f) والمستقيم $(D): y = m$ هو عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ هو :

إذا كان $m < 1$ أو $m > 3$ هناك حل وحيد

إذا كان $m = 1$ أو $m = 3$ هناك حلان مختلفان

إذا كان $1 < m < 3$ هناك ثلاثة حلول مختلفة.

4 - $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$ يعني أن (C_f) محصور بين المستقيمين $y = 1$ و $y = 3$

لنحل أولا المعادلة $f(x) = 3$

في المجال $[0, +\infty[$

$f(x) = 3$ يعني $(x-1)^2 + 1 = 3$

يعني $(x-1)^2 = 2$

يعني $x - 1 = \sqrt{2}$ أو $x - 1 = -\sqrt{2}$

يعني $x = 1 + \sqrt{2}$ أو $x = 1 - \sqrt{2}$

إذن $x = 1 + \sqrt{2}$

في المجال $]-\infty, 0]$

$f(x) = 3$ تكافئ $x = -1$

لنحل المعادلة $f(x) = 1$

في المجال $[0, +\infty[$

$f(x) = 1$ تكافئ $x = 1$

في المجال $]-\infty, 0]$

$f(x) = 1$ يعني $(x+1)^2 + 3 = 1$

يعني $-(x-1)^2 = -2$

يعني $(x+1)^2 = 2$

$x + 1 = \sqrt{2}$ يعني $x + 1 = -\sqrt{2}$

$x = -1 + \sqrt{2}$ يعني $x = -1 - \sqrt{2}$

إذن $x = -1 - \sqrt{2}$

بالرجوع إلى البداية فإن :

$1 \leqslant f(x) \leqslant 3$ $\quad -1 - \sqrt{2} \leqslant x \leqslant -1 + \sqrt{2}$

إذن : $S = [-(1 + \sqrt{2}) ; (1 + \sqrt{2})]$

تمرين 11:

نعتبر الدالة f المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{x}{x - 1}$$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - حدد مجموعة تعريف f D_f.

2 - حدد معدل تغيرات f.

3 - اعط جدول تغيرات f.

4 - بين أن $f(x) = 1 + \frac{1}{x - 1}$ لكل $x \in D_f$

5 - بين أن (C_f) هدلول حدد مركزه ومقاربه

6 - أنشئ المنحنى (C_f)

7 - لتكن g الدالة المعرفة بـ :

$$g(x) = \frac{x}{|x| - 1}$$

أ – حدد مجموعة تعريف الدالة g.

ب – بين أن g دالة فردية.

ج – بين أن $g(x) = f(x)$ لكل $x \in D_f \cap \mathbb{R}^+$

د – استنتج طريقة لانشاء (C_g) ثم أنشئ (C_g) في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هـ – حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة :

$x - m|x| + m = 0$ حيث $m \in \mathbb{R}$

الجواب :

1 - $x \in D_f$ يعني $x - 1 \neq 0$

يعني $x \neq 1$

إذن $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2 - ليكن x و y من D_f بحيث $x \neq y$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{\frac{x}{x - 1} - \frac{y}{y - 1}}{x - y}$$

$$= \frac{x(y - 1) - y(x - 1)}{(x - y)(x - 1)(y - 1)}$$

$$= \frac{xy - x - yx + y}{(x - y)(x - 1)(y - 1)}$$

$$= \frac{-(x - y)}{(x - y)(x - 1)(y - 1)}$$

إذن $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{-1}{(x - 1)(y - 1)}$

3 - في المجال $]1 , +\infty[$

لدينا $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases}$ إذن

$\begin{cases} x - 1 < 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases}$

ومنه $(x - 1)(y - 1) > 0$

إذن $\frac{-1}{(x - 1)(y - 1)} \leqslant 0$

وبالتالي f تناقصية على المجال $]1, +\infty[$

وبنفس الطريقة f تناقصية على $]-\infty, 1[$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)	↘	‖	↘

4 - ليكن $x \in D_f$

$$1+\frac{1}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}$$
$$=\frac{x}{x-1}$$

إذن $f(x)=1+\frac{1}{x-1}$ لكل $x \in D_f$

5 - معادلة (C_f) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي

$y=f(x)$

يعني $y=1+\frac{1}{x-1}$

يعني $y-1=\frac{1}{x-1}$

نضع $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-1 \end{cases}$

المعادلة (C_f) تصبح $Y=\frac{1}{X}$ في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

حيث $\Omega(1\,,1)$

ومنه (C_f) هذلول مركزه $\Omega(1\,,1)$ ومقارباه

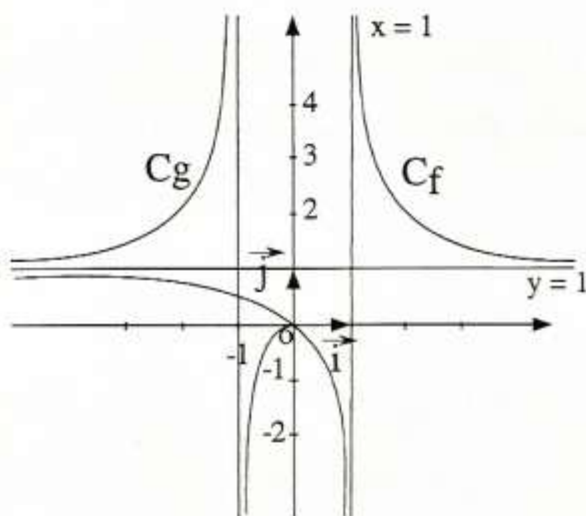
المستقيمان $x=1$ و $y=1$

طريقة 2 :

(C_f) هذلول مركزه $\Omega(\frac{1}{1}\,,\frac{1}{1})$ أي

$\Omega(1\,,1)$ ومقارباه $x=1$ و$y=1$

- 6



7 - لدينا $g(x)=\frac{x}{|x|-1}$

أ – $x \in D_g$ يعني $|x|-1 \neq 0$

يعني $|x| \neq 1$

يعني $x \neq 1$ و $x \neq -1$

وبالتالي $D_g=\mathbb{R}-\{-1\,,1\}$

ب – $x \in D_g$ يعني $x \neq 1$ و $x \neq -1$

يعني $-x \neq -1$ و $-x \neq 1$

يعني $-x \in D_g$

إذن لكل $x \in D_g$ لدينا $-x \in D_g$

لدينا

$$g(-x)=\frac{-x}{|-x|-1}$$
$$=\frac{-x}{|x|-1}$$
$$g(-x)=-g(x)$$

ومنه g دالة فردية.

ج – ليكن $x \in D_g$ بحيث $x \geqslant 0$

$$g(x)=\frac{x}{|x|-1}=\frac{x}{x-1}=f(x)$$

د – لدينا $g(x)=f(x)$ لكل



$x \in [0 , 1[\cup]1 , +\infty[$

إذن $(C_g) = (C_f)$ في $[0 , 1[\cup]1 , +\infty[$

وبما أن f فردية نتمم الرسم بإنشاء المماثل بالنسبة لأصل المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

هـ - $x - m|x| + m = 0$ يعني

$x = m(|x| - 1)$

يعني $\frac{x}{|x| - 1} = m \quad (|x| \neq 1)$

يعني $g(x) = m$

عدد حلول المعادلة هو عدد نقط تقاطع (C_g) والمستقيم $y = m$

الحالة 1 : $m = 0$ هناك وحيد هو $x = 0$

الحالة 2 : $m < 0$ هناك حلين مختلفين.

الحالة 3 : $0 < m \leqslant 1$ ليس هناك حل.

الحالة 4 : $m > 1$ هناك حلان مختلفان.

تمرين 12:

لتكن f الدالة المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{-x + 3}{x + 1}$$

(C) التمثيل المبياني لـ f في معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2 - تحقق أن $f(x) = -1 + \frac{4}{x+1}$ لكل $x \in D_f$

3 - ليكن $\Omega(-1 , -1)$ نقطة من (P).

a - بين أن معادلة (C) في المعلم $(\Omega , \vec{i} , \vec{j})$ هي $Y = \frac{4}{X}$

b - أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

4 - اعط جدول تغيرات الدالة f

5 - نعتبر الدالة g المعرفة بـــ :

$$g(x) = \frac{-|x| + 3}{|x| + 1}$$

a - أدرس زوجية الدالة g

b - أنشئ الدالة g في نفس المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

c - اعط جدول تغيرات الدالة g.

الجواب :

1 - $x \in D_f$ يعني $x + 1 \neq 0$

يعني $x \neq -1$

ومنه $D_f = \mathbb{R} - \{-1 , 1\}$

2 - لكل $x \in D_f$

$$-1 + \frac{4}{x+1} = \frac{-x - 1 + 4}{x+1}$$

$$= \frac{-x + 3}{x+1} = f(x)$$

وبالتالي $f(x) = -1 + \frac{4}{x+1}$ لكل $x \in D_f$

3 - a - معادلة (C_f) في المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$ هي $y = f(x)$

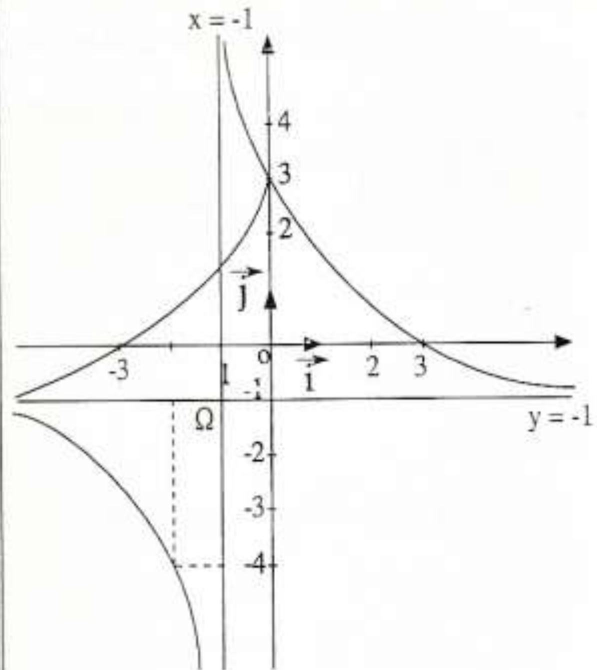
يعني $y = -1 + \frac{4}{x+1}$

يعني $y + 1 = \frac{4}{x+1}$

نضع $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y + 1 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \frac{4}{X}$ في المعلم $(\Omega , \vec{i} , \vec{j})$ حيث $\Omega(-1 , -1)$

b - (C_f) هدلول مركزه $\Omega(-1 , -1)$ ومقارباه المستقيمان $x = -1$ و $y = -1$.



4 - جدول تغيرات f من خلال المنحنى فإن :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f(x)	↘	‖	↘

5 - لدينا $g(x) = \dfrac{-|x| + 3}{|x| + 1}$

a - $x \in Dg$ يعني $|x| + 1 \neq 0$

يعني $|x| \neq -1$ وهذا دائما صحيح

إذن $Dg = \mathbb{R}$

لكل $x \in Dg$ لدينا $-x \in Dg$

$$g(-x) = \frac{-|-x|+3}{|-x|+1} = \frac{-|x| + 3}{|x| + 1} = g(x)$$

إذن g دالة زوجية.

b - لدينا g دالة زوجية إذن (Cg) يكون متماثلا بالنسبة لمحور الأراتيب.

ننشئ (Cg) أولا على $[0 , +\infty[$ في هذا المجال

$$f(x) = \frac{-|x| + 3}{|x| + 1} = \frac{-x + 3}{x + 1} = f(x)$$

إذن (Cg) و (Cf) منطبقان على هذا المجال.

c - من خلال منحنى الدالة g فإن جدول تغيرات g هو :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↗	3	↘

تمرين 13:

لتكن f الدالة العددية المعرفة بـــ :

$$f(x) = \frac{x - 2}{x}$$

و (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد وممنظم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

1 - حدد D_f وتحقق أن لكل $x \in D_f$

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x}$$

2 - ليكن $\Omega(0 , -1)$ في المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

بين أن معادلة (C) في المعلم $(\Omega , \vec{i} , \vec{j})$ هي

$$Y = \frac{-2}{X}$$

3 - أنشئ (C) في المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

4 - اعط جدول تغيرات f.

5 - نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي :

$$g(x) = \frac{|x| - 2}{x}$$

أ – أدرس زوجية الدالة g

ب – أنشئ (Cg) في نفس المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

مستعملا منحنى الدالة f.

ج – اعط جدول تغيرات g.

الجواب :

1 - لدينا $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$

$x \in D_f$ يعني $x \neq 0$

ومنه $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

لدينا كذلك $1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x-2}{x} = f(x)$

ومنه $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$ لكل $x \in D_f$

2 - معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$y = f(x)$

يعني $y = 1 - \dfrac{2}{x}$

يعني $y - 1 = \dfrac{-2}{x}$

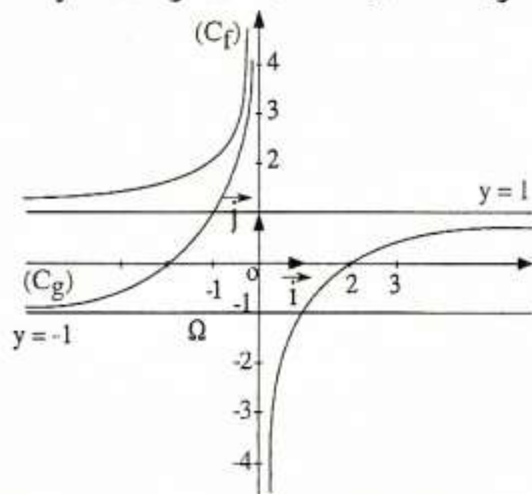
نضع $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \dfrac{-2}{X}$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega(0, -1)$.

3 - (C_f) عبارة عن هذلول مركزه $\Omega(0, -1)$

ومقارباه المستقيمان $x = 0$ و $y = 1$.



4 - جدول تغيرات f

حسب منحنى f فإن

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↗	‖	↗

5 - لدينا $g(x) = \dfrac{|x| - 2}{x}$

$x \in D_g$ يعني $x \neq 0$

ومنه $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

لكل $x \in D_g$ لدينا $-x \in D_g$

$$g(x) = \frac{|-x| - 2}{-x} = \frac{|x| - 2}{-x} = -\frac{|x| - 2}{x} = -g(x)$$

إذن g دالة فردية.

ب – لدينا g دالة فردية إذن (C_g) متماثل بالنسبة لأصل المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

في المجال $]0, +\infty[$ لدينا :

$$g(x) = \frac{|x| - 2}{x} = \frac{x - 2}{x}$$

$g(x) = f(x)$

إذن (C_f) و (C_g) منطبقان في المجال $]0, +\infty[$

ثم نتمم الرسم بإنشاء المماثل بالنسبة لأصل المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ج – جدول تغيرات g.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g(x)	↗	‖	↗



تمرين 14:

لتكن الدالة f و g المعرفين بما يلي :

$g(x) = \frac{x}{x-1}$ و $f(x) = x^2 - 2x + 2$

(Cf) و(Cg) هما المنحنيان الممثلان لـ f و g

المعلم المتعامد والممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و$\Omega(1, 1)$ نقطة من (P)

1 - حدد معادلتي (Cf) و (Cg) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2 - أنشئ (Cf) و (Cg) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3 - لتكن الدالة h المعرفة بما يلي :

$$h(x) = x^2 - 2x + 2 + \frac{x}{1-x}$$

أدرس مبيانيا إشارة الدالة h(x).

الجواب :

1 - معادلة (Cf) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = f(x)$$

يعني $y = x^2 - 2x + 2$

يعني $y = x^2 - 2x + 1 + 1$

يعني $y - 1 = (x-1)^2$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$

معادلة (Cf) تصبح $Y = X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega(1, 1)$.

معادلة (C_g) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = g(x)$$

يعني $y = \frac{x}{x-1}$

يعني $y = \frac{x-1+1}{x-1}$

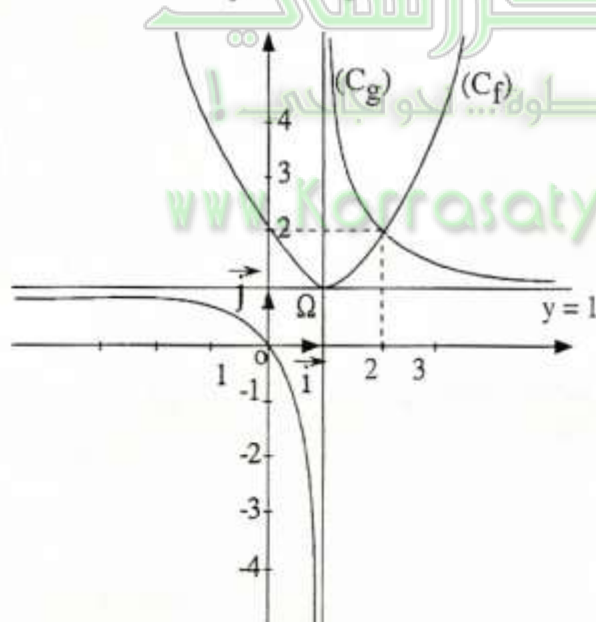
يعني $y = 1 + \frac{1}{x-1}$

يعني $y - 1 = \frac{1}{x-1}$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \frac{1}{X}$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

2 - (Cf) شلجم رأسه $\Omega(1, 1)$ وموجه نحو الأعلى (Cg) هذلول مركزه $\Omega(1, 1)$ ومقارباه المستقيمان x = 1 و y = 1.



3 - لدينا

$$h(x) = x^2 - 2x + 2 + \frac{x}{1-x}$$
$$= x^2 - 2x + 2 - \frac{x}{x-1}$$
$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$h(x) \geqslant 0$ يعني $f(x) - g(x) \geqslant 0$



يعني $f(x) \geqslant g(x)$

يعني x توجد في المجال الذي يكون فيه (C_f) فوق (C_g).

إذن :

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
h(x)	+	‖	-	0	+

تمرين 15:

نعتبر الدالة المعرفة بـــ :

$$g(x) = \frac{x-2}{x-1}$$

1 - تحقق أن :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x-1} \quad \text{لكل} \quad x \in D_f$$

2 - أ – أحسب معدل تغيرات f.

ب – اعط جدول تغيرات f.

3 - أ – بين أن (C_f) هذلول محددا عناصره المميزة.

ب – أنشئ المنحنى (C_f) في معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4 - حل مبيانيا المتراجحة $f(x) > 0$

5 - نعتبر الدالة المعرفة بـــ :

$$g(x) = x^2 - 2x + 3$$

أ – بين أن (C_g) عبارة عن شلجم حدد عناصره المميزة.

ب – أنشئ (C_g) في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ج – حل مبيانيا المتراجحة $\frac{g(x)}{f(x)} > 0$

(α هو حل المعادلة $g(x) = f(x)$ غير مطلوب تحديده).

الجواب :

1 - لدينا

$$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1} = f(x)$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x-1} \quad \text{لكل} \quad x \in D_f$$

2 - أ - ليكن x و y من D_f بحيث $x \neq y$

لدينا :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\frac{x-2}{x-1} - \frac{y-2}{y-1}}{x-y}$$

$$= \frac{(x-2)(y-1) - (x-1)(y-2)}{(x-1)(y-1)(x-y)}$$

$$= \frac{xy - x - 2y + 2 - xy + 2x + y - 2}{(x-1)(y-1)(x-y)}$$

$$= \frac{x-y}{(x-1)(y-1)(x-y)}$$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{1}{(x-1)(y-1)}$$

ب – في المجال $]0, +\infty[$ لدينا :

لدينا $\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases}$

ومنه $(x-1)(y-1) > 0$

إذن $\frac{1}{(x-1)(y-1)} > 0$

وبالتالي f تزايدية على المجال $]1 , +\infty[$

في المجال $]-\infty , 1[$ لدينا :

$$\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases}$$

إذن
$$\begin{cases} x - 1 < 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases}$$

إذن $(x-1)(y-1) > 0$

ومنه $\frac{1}{(x-1)(y-1)} > 0$

وبالتالي f تزايدية على المجال $]-\infty , 1[$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)	↗	‖	↗

3 - أ – معادلة (Cf) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = f(x)$$

يعني $y = 1 - \frac{1}{x-1}$

يعني $y - 1 = -\frac{1}{x-1}$

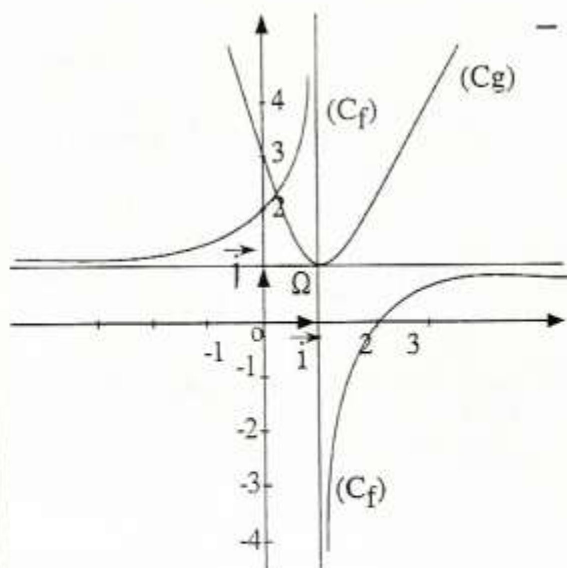
نضع
$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$$

المعادلة تصبح $Y = \frac{-1}{X}$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega(1 , 1)$.

وبالتالي (Cf) هذلول مركزه Ω ومقارباه المستقيمان $x = 1$ و $y = 1$.

ب –



4 - $f(x) > 0$ يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه (Cf) فوق محور الأفاصيل.

$S =]-\infty , 1[\cup]2 , +\infty[$

5 - أ – معادلة (Cg) في المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

هي $y = f(x)$

يعني $y = x^2 - 2x + 3$

يعني $y = x^2 - 2x + 1 + 2$

يعني $y = (x-1)^2 - 2$

يعني $y - 2 = (x-1)^2$

نضع
$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$$

المعادلة تصبح $Y = X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega'(1 , 1)$.



إذن (C_g) شلجم رأسه Ω' موجه نحو الأعلى ومحور تماثله المستقيم $x = 1$

طريقة 2 :

(C_g) شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{2}{2}, g(1)\right)$ أي $\Omega(1, 1)$

ج – $\frac{g(x)}{f(x)} > 1$ يعني $\frac{g(x)}{f(x)} - 1 > 0$

يعني $\frac{g(x) - f(x)}{f(x)} > 0$

جدول الإشارة

x	$-\infty$		α		1		2		$+\infty$
$g(x) - f(x)$		+	0	-	‖	+		+	
$f(x)$		+		+	‖	-		+	
$\frac{g(x) - f(x)}{f(x)}$		+	0	-	‖	-		+	

وبالتالي : $S =]-\infty, \alpha[\cup]2, +\infty[$

تمرين 16:

لتكن f و g الدالتين المعرفتين بـ :

$g(x) = \frac{2x - 1}{x - 1}$ و $f(x) = x^2 - 2x + 3$

(C) و (C') منحنياهما على التوالي في معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - أحسب $f(0)$; $f(2)$; $g(2)$

2 - حدد زوج احداثيتي كل من نقط تقاطع (C') مع محوري المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3 - أثبت أن $Y = X^2$ و $Y = \frac{1}{X}$ هما معادلتان ديكارتيتان لـــ (C) و (C') على التوالي في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\vec{O\Omega} = \vec{i} + 2\vec{j}$

4 - أنشئ (C) و (C')

5 - حل مبيانيا المتراجحة :

$$g(x) - f(x) \leqslant 0$$

6 - ناقش تبعا لقيم عدد حلول المعادلة :

$$(E) \qquad x^2 - 2x + 3 - m = 0$$

7 - نعتبر الدالة h المعرفة بـــ :

$$h(x) = x^2 + 2|x| + 3$$

أ – بين أن h دالة زوجية.

ب – بين أن لكل $x \leqslant 0$ $h(x) = f(x)$

ج – استنتج تغيرات الدالة h

الجواب :

1 - لدينا :

$f(0) = 3 \qquad f(2) = 3 \qquad g(2) = 3$

2 - التقاطع مع محور الأفاصيل

$g(x) = 0$ يعني $\frac{2x - 1}{x - 1} = 0$

يعني $2x - 1 = 0$

يعني $x = \frac{1}{2}$

إذن (C') يقطع محور الأفاصيل في $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

(C') يقطع محور الأراتيب في $B(0, g(0))$

أي $B(0, 1)$

3 - معادلة (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = f(x)$$

يعني $y = x^2 - 2x + 3$

يعني $y = x^2 - 2x + 1 + 2$

يعني $y - 2 = (x - 1)^2$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega(1, 2)$ أي $\vec{O\Omega} = \vec{i} + 2\vec{j}$

– معادلة (C') في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$y = g(x)$

يعني $y = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$

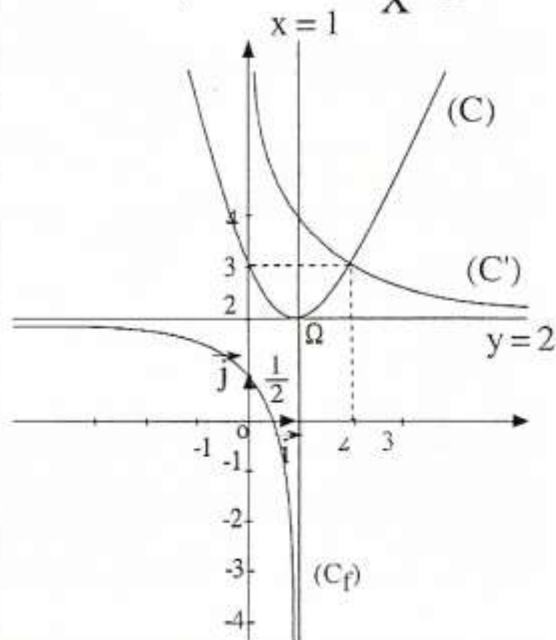
يعني $y = \dfrac{2(x - 1) + 1}{x - 1}$

يعني $y = 2 + \dfrac{1}{x - 1}$

يعني $y - 2 = \dfrac{1}{x - 1}$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \dfrac{1}{X}$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$



5 - $g(x) - f(x) \leqslant 0$ يعني $g(x) \leqslant f(x)$

يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه (Cg) تحت (Cf).

إذن $S =]-\infty , 1[\cup]2 , +\infty[$

6 - $x^2 - 2x + 3 - m = 0$

يعني $x^2 - 2x + 3 = m$

يعني $f(x) = m$

عدد حلول المعادلة هو عدد نقط تقاطع (Cf) مع المستقيم الذي معادلته $y = m$.

إذا كان $m = 2$ هناك حل وحيد.

إذا كان $m > 2$ هناك حلان مختلفان.

إذا كان $m < 2$ ليس هناك حل.

7 - لدينا :

$h(x) = x^2 + 2|x| + 3$

أ – لدينا

$D_h = \mathbb{R}$

لكل $x \in D_h$ لدينا $-x \in D_h$

$h(-x) = (-x)^2 + 2|-x| + 3$

$= x^2 + 2|x| + 3$

$h(-x) = h(x)$

إذن h دالة زوجية

ب – لكل $x \leqslant 0$ لدينا $|x| = -x$

$h(x) = x^2 + 2|x| + 3$

$= x^2 - 2x + 3$

إذن $h(x) = f(x)$ لكل $x \leqslant 0$

ج – جدول تغيرات h.



لدينا $f = h$ في $]-\infty , 1]$ إذن h و f لهما نفس التغيرات على $]-\infty , 0]$

إذن h تناقصية على $]-\infty , 0]$ وبما أنها زوجية فإن h تزايدية على $[0 , +\infty[$

تمرين 17:

لتكن الدالة f المعرفة بمايلي :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3|x| + 2}{x^2 \quad 4}$$

1 - حدد D_f مجموعة تعريف f ثم ادرس زوجية f

2 - نضع $g(x) = f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^+ \cap D_f$

بين أن $g(x) = 1 - \dfrac{3}{x+2}$

3 - أ – حدد طبيعة (C_f) وعناصره المميزة.

ب – أنشئ (C_g) ثم استنتج (C_g) في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4 - حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة :

$$x^2(1 - m) - 3|x| + 2(1 + 2m) = 0$$

وذلك حسب قيم x

الجواب :

1 - $x \in D_f$ يعني $x^2 - 4 \neq 0$

يعني $x^2 \neq 4$

يعني $x^2 \neq 2$ و $x \neq -2$

ومنه $D_g = \mathbb{R} - \{-2 , 2\}$

لكل $x \in D_f$ لدينا $-x \in D_f$

$$f(-x) = \frac{x^2 - 3|x| + 2}{(-x)^2 \quad 4}$$

$$= \frac{x^2 - 3|x| + 2}{x^2 \quad 4}$$

$$f(-x) = f(x)$$

إذن f دالة زوجية.

2 - لدينا : لكل $x \in D_f \cap \mathbb{R}^+$ $|x| = -x$

$$g(-x) = \frac{x^2 - 3|x| + 2}{x^2 \quad 4}$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 \quad 4}$$

$$= \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x-1}{x+2}$$

$$= \frac{x+2-3}{x+2}$$

إذن $g(x) = 1 - \dfrac{3}{x+2}$

3 - أ – لنحدد طبيعة (C_f)

معادلة (C_g) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = g(x)$$

$$x \in D_f \cap \mathbb{R}^+$$

يعني $y = 1 - \dfrac{3}{x+2}$

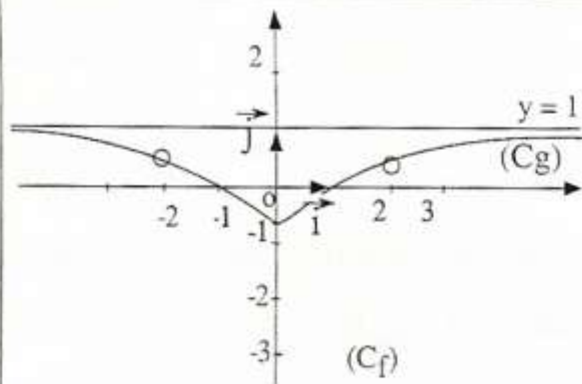
يعني $y - 1 = -\dfrac{3}{x+2}$

نضع $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 1 \end{cases}$

معادلة (C_g) في $D_f \cap \mathbb{R}^+$ تصبح $Y = \dfrac{-3}{X}$

إذن (C_g) جزء من هذلول مركزه $\Omega(-2 , 1)$

ومقارباه $x = -2$ و $y = 1$.



4 -

$x^2(1-m) - 3|x| + 2(1+2m) = 0$

$x^2 - mx^2 - 3|x| + 2 + 4m = 0$

يعني $x^2 - 3|x| + 2 = m(x^2 - 4)$

$\frac{x^2 - 3|x| + 2}{(x)^2 - 4} = m$ و $(|x| \neq 2)$

يعني $f(x) = m$

عدد حلول المعادلة هو عدد نقط تقاطع (C_f) والمستقيم $y = m$

إذا كان $m = -\frac{1}{2}$ هناك حل وحيد.

إذا كان $m < -\frac{1}{2}$ ليس هناك حل .

إذا كان $m = \frac{1}{4}$ ليس هناك حل.

إذا كان $-\frac{1}{2} < m < 1$ و $m \neq -\frac{1}{4}$ هناك حلين مختلفين

إذا كان $m \geqslant 1$ ليس هناك حل.

تمرين 18:

1 - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$4x - x^2 = 2 + \frac{1}{x-1}$$

2 - أنشئ في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ المتعامد والممنظم المنحنيان (C_f) و (C_g) حيث :

$f(x) = 4x - x^2 \qquad g(x) = 2 + \frac{2}{x-1}$

وحدد احداثيتي نقط تقاطعهما.

3 - استنتج التمثيل المبياني للدالة h المعرفة بما يلي :

نضع

$$\begin{cases} h(x) = g(x) & x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[\\ h(x) = f(x) & x \in]0, 2[\end{cases}$$

4 - حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $h(x) = m$ حيث $m \in \mathbb{R}$

الجواب:

1 - مجموعة تعرف المعادلة $D: \mathbb{R} - \{2\}$

تكافئ $4x - x^2 = 2 + \frac{2}{x-1}$

تكافئ $4x - x^2 = \frac{2x - 2 + 2}{x-1}$

يعني $x(4-x)(x-1) = 2x$

يعني $x(4-x)(x-1) - 2x = 0$

يعني $x[(4-x)(x-1) - 2] = 0$

يعني $x[(4-x)(x-1) - 2] = 0$

يعني $x = 0$ أو $(4-x)(x-1) - 2 = 0$

يعني $x = 0$ أو $4x - 4 - x^2 + x - 2 = 0$

يعني $x = 0$ أو $-x^2 + 5x - 6 = 0$

بالنسبة للمعادلة $-x^2 + 5x - 6 = 0$

لدينا $\Delta = 25 - 4(-1) \times (-6) = 1$

إذن $x = \frac{-5+1}{-2} = 2$ أو $x = \frac{-5-1}{-2} = 3$

إذن $S = \{0, 2, 3\}$

2 - معادلة (Cg) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$y = f(x)$

يعني $y = 2 + \frac{2}{x-1}$

يعني $y - 2 = -\frac{2}{x-1}$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \frac{2}{X}$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega(1, 2)$ إذن (Cf) هذلول مركزه

$\Omega(1, 2)$ ومقارباه $x = 1$ و $y = 2$

معادلة (Cf) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$y = f(x)$

يعني $y = 4x - x^2$

يعني $y = -(x^2 - 4x)$

يعني $y = -(x^2 - 4x + 4 - 4)$

يعني $y = -(x-2)^2 + 4$

يعني $y - 4 = -(x-2)^2$

نضع $\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 4 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = -X^2$ في المعلم $(\Omega', \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega'(2, 4)$.

4 - لدينا $h(x) = m$ يعني x أفصول نقطة تقاطع (C_h) مع المستقيم الذي معادلته

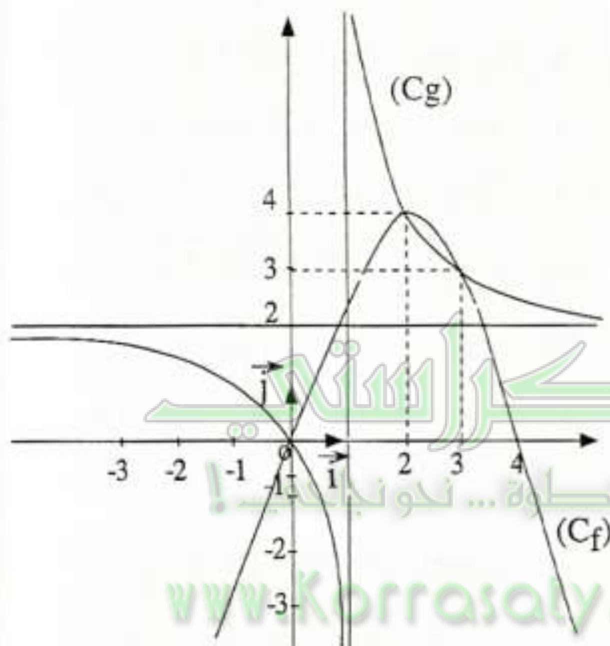
$(\Delta)\ \ y = m$

إذن :

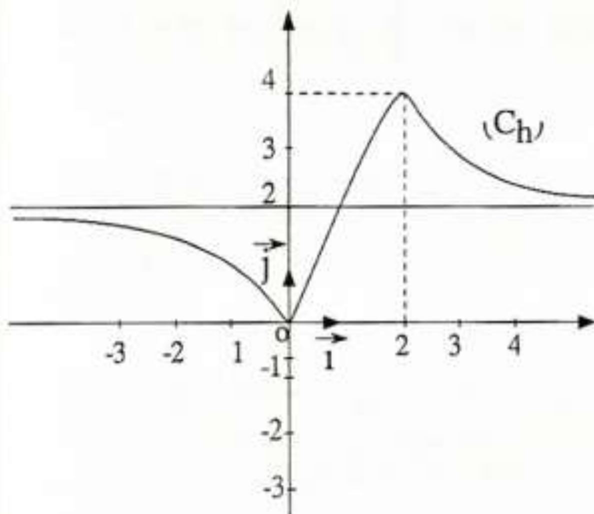
– إذا كان $m = 2$ و $m = 4$ أو $m = 0$ هناك حل وحيد.

– إذا كان $m > 4$ أو $m < 0$ فإن $S = \phi$

– إذا كان $0 < m < 2$ أو $2 < m < 4$ هناك حلان مختلفان



- 3







تمرين 1 :

نعتبر الدالة المعرفة بـــ : $f(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$

(Cf) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 - حدد مجموعة تعريف الدالة f.

2 - لتكن $\Omega(1 , 2)$ بين أن معادلة (Cf) هي $Y = \dfrac{2}{X}$ في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

3 - أنشئ المنحنى (Cf)

4 - اعط جدول تغيرات f.

5 - حدد حسب قيم m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$

6 - نعتبر الدالة g المعرفة بـــ :

$$g(x) = \frac{2x}{|x| - 1}$$

حدد مجموعة تعريف g Dg.

أدرس زوجية الدالة g.

أنشئ (Cg) منحنى g في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

تمرين 2 :

نعتبر الدالة المعرفة بـــ : $f(x) = x^2 - 2x - 2$

1 - تحقق أن : $f(x) = (x - 1)^2 - 3$ لكل $x \in \mathbb{R}$

2 - حدد نقط تقاطع (Cf) مع محوري المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

3 - لتكن $\Omega (1 , -3)$ نقطة من المستوى (P)

أ – بين أن معادلة (Cf) في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ هي $Y = X^2$

ب – أنشئ (Cg) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

4 - نعتبر الدالة g المعرفة بـــ : $g(x) = 2x - 2$



أ – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $g(x) = f(x)$

ب – حل مبيانيا المتراجحة $f(x) > g(x)$

تمرين 3 :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بـــ :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad و \quad g(x) = x^2 - 2x$$

1 - حدد (Df) مجموعة تعريف f

2 - أحسب $f(0)$ و $f(1)$

3 - حدد تقاطع (Cf) مع محوري الأفاصيل

4 - a - بين أن $g(x) = (x-1)^2 - 1$

6 - أنشئ (Cg) و (Cf) منحنى f و g في نفس المعلم المتعامد والمنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5 - حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة :

$$-x^2 + 2x^2 + \frac{1}{x+1} = 0$$

تمرين 4 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على بـــ :

$$f(x) = x^2 + x + \frac{9}{4}$$

1 - تحقق أنه لكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2$$

2 - لتكن Ω النقطة التي زوج احداثيتها $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$

أ – بين أن $Y = X^2$ هي معادلة ديكارتية لـــ (f) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

ب – أنشئ المنحنى (Cf) ثم استنتج تغيرات f

3 - لتكن g الدالة المعرفة بـــ :

$$g(x) = \frac{-6}{6x-5}$$

أ – تحقق أن : $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)$

ب – أنشئ (Cg) في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$



4 - بين أن المعادلة $f(x) = g(x)$ تقبل حلين مختلفين أحدهما α سالب قطعا.

5 - حل المتراجحة $f(x) < g(x)$

تمرين 5 :

لتكن الدالتين f و g المعرفتين بـــ : $f(x) = x^2$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

1 - حدد معادلة (Cg) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(1, 1)$

2 - أنشئ (Cf) و(Cg) في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3 - بين مبيانيا أن المعادلة : $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$

4 - لتكن الدالة h المعرفة بما يلي :

$$h(x) = \frac{|x| + 1}{|x| - 1}$$

أ – أدرس زوجية الدالة h.

ب – أنشئ (Ch) في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ مستعملاً منحنى الدالة g.

تمرين 6 :

I - نعتبر الدالة f المعرفة بـــ :

$$f(x) = -x^2 + 6x + 8$$

(Cf) المنحنى الممثل لـــ f في معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - بين أن :

$$f(x) - 1 = -(x-3)^2 \quad \text{لكل} \quad x \in \mathbb{R}$$

2 - استنتج أن معادلة ديكارتية لـــ (Cf) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(3, 1)$

3 - حدد نقط تقاطع (Cf) مع محوري المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4 - أنشئ المنحنى (Cf) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

II - نعتبر الدالة g المعرفة بـــ :

$$g(x) = \frac{x-4}{x-3}$$

1 - بين أن $g(x) = 1 - \frac{1}{x-3}$ لكل $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

2 - بين أن (Cg) هذلول حدد عناصره المميزة.



3 - أحسب $g(4)$ و $g(0)$

4 - أنشئ المنحنى (Cg) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

5 - حل مبيانيا المتراجحة :

$$\frac{1}{x-3} < x^2 - 6x + 9$$

تمرين 7 :

نعتبر الدالة المعرفة بـــ : $f(x) = \frac{x}{x-1}$

1 - حدد مجموعة تعريف f.

2 - أحسب معدل تغيرات f.

3 - اعط جدول تغيرات f.

4 - بين أن $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$ لكل $x \in D_f$

5 - بين أن (C_f) هذلول حدد مركزه ومقارباه

6 - أنشئ المنحنى (C_f)

7 - لتكن g الدالة المعرفة بـــ : $g(x) = \frac{x}{|x|-1}$

a - حدد D_g مجموعة تعريف g.

b - بين أن g دالة فردية.

c - بين أن $g(x) = f(x)$ لكل $x \geqslant 0$

d - استنتج طريقة لانشاء (Cg) ثم أنشئ (Cg) في نفس المعلم

f - حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة.

$x - m|x| + m = 0$ حيث $m \in \mathbb{R}$

تمرين 8 :

نعتبر الدالة f المعرفة بـــ : $f(x) = x|x+2| + 1$

1 - بين أن :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)^2 & ; \quad x \geqslant -2 \\ f(x) = -(x+1)^2 + 2 & ; \quad x \leqslant -2 \end{cases}$$

2 - أنشئ (C_f) المنحنى الممثل لـــ f في معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$



3 - اعط جدول تغيرات f

4 - حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = 2m$ حيث $m \in \mathbb{R}$

تمرين 9 :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بـــ : $g(x) = \frac{x - 1}{2 - x}$ و $f(x) = x^2 - 4x + 3$

1 - بين أن g تزايدية على $]-\infty , 2[$ و $]2 , +\infty[$

2 - تحقق من أن : $f(x) = (x - 1)(x - 3)$ ثم حدد نقط تقاطع (C_f) و (C_g)

3 - حدد تقاطع (C_f) و (C_g) مع محوري الأفاصيل والأراتيب.

4 - بين أنه توجد نقطة $\Omega (a , b)$ يتم تحديدها بحيث تكتب معدلات (C_f) و (C_g) على التوالي على الشكل.

$Y = X^2$ و $Y = -\frac{2}{X}$ في معلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

5 - أنشئ (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ثم حل مبيانيا المتراجحة $g(x) \leqslant f(x)$

6 - f تقبل قيمة قصوية أو دنوية ؟ حددها

تمرين 10 :

نعتبر الدالة f المعرفة بـــ : $f(x) = x^2 + 2 - 3$

1 - بين أن (C_f) شلجم حدد عناصره المميزة.

2 - أنشئ المنحنى (C_f) في معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3 - نعتبر الدالة g المعرفة بـــ :

$$g(x) = x^2 - 2|x| - 3$$

أ – بين أن g دالة زوجية

ب – بين أن $g(x) = f(x)$ لكل $x \leqslant 0$

ج – استنتج تغيرات الدالة g

د – حدد طريقة لإنشاء (C_g) ثم أنشئ (C_g) في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

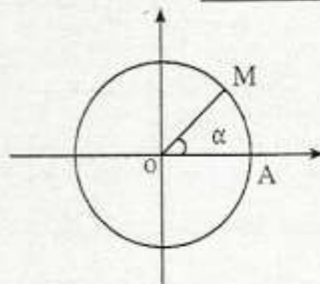
الحساب المثلثي

- عدد الصفحات : [47]
- عدد التمارين : [32]
- عدد تمارين البحث : [15]



13 الحساب المثلثي

1 ـ الأفاصيل المنحنية لنقطة :



$(\mathscr{E})$ دائرة مثلثية أصلها A ليكن α طول القوس $[\widehat{AM}]$، $M \in (\mathscr{E})$

* كل عدد يكتب على الشكل $\alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ يسمى أفصولا منحنيا للنقطة M.

* نقول إن β أفصول منحنى رئيسي لـ M إذا كان β أفصولا منحنيا وينتمي إلى المجال $]-\pi,\pi]$.

ملاحظة : x و y أفصولين منحنين لنفس النقطة يعني : $y = x + 2k\pi$

ونكتب $y \equiv x\ [2\pi]$. (y يساوي x بترديد 2π)

2 ـ الزوايا الموجهة :

* $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات :

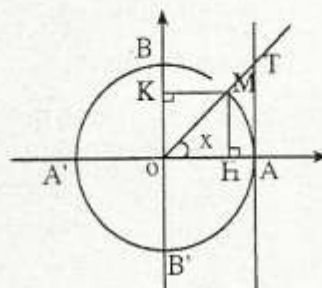
3 ـ النسب المثلثية :

* $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \equiv -(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})\ [2\pi]$

* $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \equiv (\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{w},\overrightarrow{v})\ [2\pi]$

* $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \equiv (-\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}) \equiv \pi + (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\ [2\pi]$

* $(-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v}) \equiv (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\ [2\pi]$



تعريفيا : لكل x من $\mathbb{R}$ و $\sin x = \overline{OK}$ و $\cos x = \overline{OH}$ ولكل x يخالف: $\frac{\pi}{2} + k\pi$
حيث $k \in \mathbb{Z}$ $\tan x = \overline{AT}$

خاصيات :

لكل x من $\mathbb{R}$: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

لكل : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; * $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

* لكل x من $\mathbb{R}$: $k \in \mathbb{Z}$

$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$; * $\cos(-x) = \cos x$

$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$; * $\sin(-x) = -\sin x$

لكل x يخالف $\frac{\pi}{2} + k\pi$: $k \in \mathbb{Z}$

$\tan(x + k\pi) = \tan x$; * $\tan(-x) = -\tan x$

* لكل x من $\mathbb{R}$ ولكل x يخالف $\frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$; * $\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$; * $\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$; * $\tan(\pi + x) = \tan x$

* لكل **x** من $\mathbb{R}$ ولكل x يخالف $\frac{\pi}{2} + k\pi$ و $k\pi$.

* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$; * $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; * $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

* $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$; * $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرفة	0



4 ـ المعادلات والمتراجحات :

المعادلة $(E) : \cos = a$

إذا كان $a > 1$ أو $a < -1$ فإن $S = \emptyset$

إذا كان $-1 \leqslant a \leqslant 1$ فإنه يوجد α من $\mathbb{R}$ حيث $a = \cos\alpha$.

(E) تكافئ $\cos x = \cos\alpha$ أي أن $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

حالات خاصة :

$\cos x = 0$ تكافئ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 1$ تكافئ $x = 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -1$ تكافئ $x = \pi + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

ملاحظة : $\cos x = -\cos\alpha$ تكافئ $\cos x = \cos(\pi - \alpha)$

المعادلة $(E') : \sin x = b$

إذا كان $b < -1$ أو $b > 1$ فإن $S = \emptyset$

إذا كان $-1 \leqslant b \leqslant 1$ فإنه يوجد β من $\mathbb{R}$ حيث $b = \sin\beta$.

(E') تكافئ $\sin x = \sin\beta$ أي أن $\begin{cases} x = \beta + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

حالات خاصة :

$\sin x = 0$ تكافئ $x = k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = 1$ تكافئ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$



$\sin x = -1$ تكافئ $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbf{Z}$

ملاحظة : $\sin x = -\sin \beta$ تكافئ $\sin x = \sin(-\beta)$

المعادلة $\tan x = c$:

$c \in \mathbb{R}$ إذن يوجد عدد من $\mathbb{R}$ بحيث : $c = \tan \gamma$

وبالتالي : $\tan x = c$ تكافئ $\tan x = \tan \gamma$ أي أن $x = \gamma + k\pi$ مع $k \in \mathbf{Z}$

ملاحظة : $\tan x = -\tan \gamma$ تكافئ $\tan x = \tan(-\gamma)$

* المتراجحات المثلثية :

لحل متراجحة مثلثية على الشكل

$\cos x \geqslant a$ أو $\sin x \geqslant a$ أو $\tan x \geqslant a$

$\cos x \leqslant a$ أو $\sin x \leqslant a$ أو $\tan x \leqslant a$

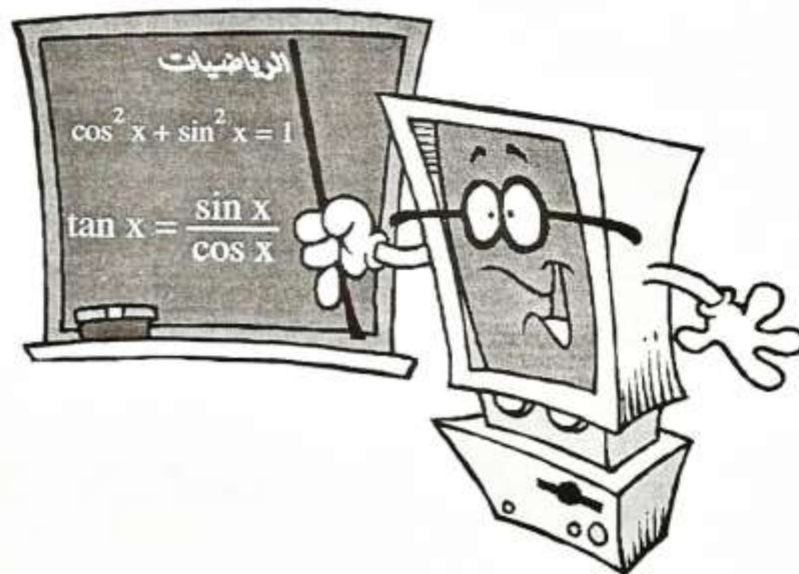
في مجال I.

نتبع المراحل التالية :

1 – نحل المعادلة في المجال I.

2 – نمثل الحلول على الدائرة المثلثية.

3 – نحدد الأقواس الممثلة لحلول المتراجحة ثم نستنتج المجالات التي تمثل حلول المتراجحة.





تمارين وحلولها

تمرين 1 :

اتمم الجدول التالي :

الرديان	$\frac{\pi}{8}$				$\frac{\pi}{6}$
الدرجة		$15°$		$36°$	
الغراد			50		

الجواب :

* لدينا : $\frac{\pi}{8} = \frac{180}{8} = 22°,5$

$$\frac{\pi}{8} = \frac{200}{8} = 25 \text{ gr}$$

* لدينا : $\frac{x}{\pi} = \frac{15}{180}$

أي أن $x = \frac{15\pi}{180}$

$$x = \frac{\pi}{12}$$

* لدينا $\frac{\pi}{12} = \frac{200}{12} \simeq 16,66 \text{ gr}$

$$50 \text{ gr} = \frac{200}{4} x = \frac{180°}{4} = 45°$$

$$50 \text{ gr} = \frac{\pi}{4}$$

* لدينا

$$\frac{x}{\pi} = \frac{36°}{180}$$

$$\frac{x}{\pi} = \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{5} = \frac{200}{12} = 40 \text{ gr}$$

* لدينا : $\frac{\pi}{6} = \frac{180°}{6} = 30°$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{200}{6} = 33,33 \text{ gr}$$

إذن

الرديان	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$
الدرجة	$22,5°$	$15°$	$45°$	$36°$	$30°$
الغراد	25 gr	16,66gr	50	$40°$	33,33gr

تمرين 2 :

1 – احسب بالرديان قياسات زوايا مثلث متساوي الأضلاع.

2 – احسب بالراديان قياسات زوايا مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين.

الجواب :

1 – ليكن ABC مثلثا متساوي الأضلاع.

نعلم أن $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$

إذن : $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{3}$

2 – ليكن EFG مثلثا متساوي الساقين وقائم الزاوية مثلا في E.

نعلم أن : $\hat{E} = 90°$



و $\hat{F} = \hat{G} = 45°$

إذن $\hat{E} = \frac{\pi}{2}$

و $\hat{F} = \hat{G} = \frac{\pi}{4}$

تمرين 3 :

1 – حدد الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة في الحالات التالية :

أ – $M\left(-\frac{99\pi}{7}\right)$

ب – $M\left(\frac{504\pi}{7}\right)$

ج – $M\left(-\frac{277\pi}{4}\right)$

2 – هل العددان x و y هما أفصولان منحنيان لنفس النقطة على الدائرة المثلثية في الحالتين التاليتين :

أ – $x = \frac{45\pi}{4}$ و $x = -\frac{3\pi}{4}$

ب – $x = -\frac{123\pi}{5}$ و $x = \frac{337\pi}{5}$

الجواب :

1 – أ – لدينا $-\frac{99\pi}{7} = -\frac{98\pi + \pi}{7}$

$= -14\pi - \frac{\pi}{7}$

إذن : $-\frac{99\pi}{7} \equiv -\frac{\pi}{7}\ [2\pi]$

و $-\frac{\pi}{7} \in]-\pi,\pi]$

إذن الأفصول المنحنى الرئيسي لـ M هو $-\frac{\pi}{7}$

ب – لدينا $\frac{504\pi}{5} = \frac{500\pi + 4\pi}{5}$

$= 100\pi + \frac{4\pi}{5}$

إذن : $\frac{504\pi}{5} \equiv \frac{4\pi}{5}\ [2\pi]$

ومنه الأفصول المنحني الرئيسي لـ M هو $\frac{4\pi}{5}$

لأن $\frac{4\pi}{5} \in]-\pi,\pi]$

ج – لدينا : $-\frac{277\pi}{4} = \frac{-280\pi + 3\pi}{4}$

$= -70\pi + \frac{3\pi}{4}$

إذن $-\frac{277\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

إذن الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M هو $\frac{3\pi}{4}$

لأن $\frac{3\pi}{4} \in]-\pi,\pi]$

2 – أ – لدينا : $x = \frac{45\pi}{4}$

$= \frac{48\pi - 3\pi}{4}$

$= 12\pi - \frac{3\pi}{4}$

إذن $x = 12\pi + y$

ومنه $x \equiv y\ [2\pi]$

إذن x و y أفصولان منحنيان لنفس النقطة

ب – نفترض أن : $x \equiv y\ [2\pi]$ أي أنه يوجد k من $\mathbb{Z}$ حيث : $x = y + 2k\pi$

أي أن $-\frac{123\pi}{5} = \frac{337\pi}{5} + 2k\pi$

أي أن $-\frac{123\pi}{5} - \frac{337\pi}{5} = 2k\pi$

ومنه $2k\pi = -\frac{500\pi}{5}$



ومنه $2\,k\pi = -\,100\pi$

$2\,k\pi = -\,100$

$2\,k = -\,100$

ومنه $k = -\,50$

وبما أن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $x \equiv y\ [2\pi]$ إذن x و y أفصولان منحنيان لنفس النقطة.

تمرين 4 :

مثل على دائرة مثلثية النقط ذات الأفاصيل المنحنية التالية :

$-\pi \ ; \ \frac{8\pi}{3} \ ; \ \frac{41\pi}{6} \ ; \ \frac{25\pi}{4} \ ; \ -\frac{33\pi}{4} \ ; \ \frac{169\pi}{4}$

الجواب :

* نعتبر $A'(-\pi)$ إذن الأفصول المنحني الرئيسي لـ A' هو : π

* نعتبر $B\left(\frac{8\pi}{3}\right)$.

لدينا $\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi + 2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$

إذن $\frac{8\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

الأفصول المنحني الرئيسي لـ B هو $\frac{2\pi}{3}$.

* نعتبر $C\left(\frac{41\pi}{6}\right)$.

لدينا $\frac{41\pi}{6} = \frac{36\pi + 5\pi}{6}$

$= 6\pi + \frac{5\pi}{6}$

إذن $\frac{41\pi}{6} \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

الأفصول المنحني الرئيسي لـ C هو $\frac{5\pi}{6}$.

* نعتبر $D\left(\frac{25\pi}{4}\right)$.

لدينا $\frac{25\pi}{4} = \frac{24\pi + \pi}{4}$

$= 6\pi + \frac{\pi}{4}$

إذن $\frac{25\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

الأفصول المنحني الرئيسي لـ D هو $\frac{\pi}{4}$.

* نعتبر $B\left(-\frac{33\pi}{4}\right)$.

لدينا $\frac{33\pi}{4} = \frac{-32\pi - \pi}{4}$

$= -8\pi - \frac{\pi}{4}$

إذن $\frac{33\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

الأفصول المنحني الرئيسي لـ E هو $\frac{\pi}{4}$

نعتبر $F\left(\frac{169\pi}{3}\right)$

لدينا $\frac{169\pi}{8} = \frac{168\pi + \pi}{8}$

$= 21\pi + \frac{\pi}{8}$

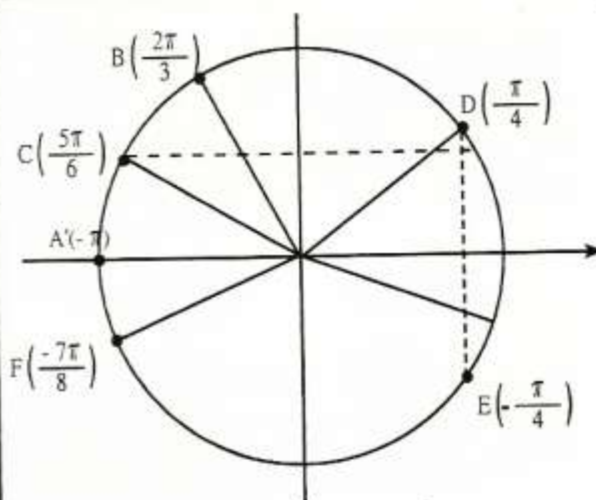
$= 21\pi + \pi + \frac{\pi}{8}$

إذن $\frac{169\pi}{8} \equiv \pi + \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

$\equiv -\pi + \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

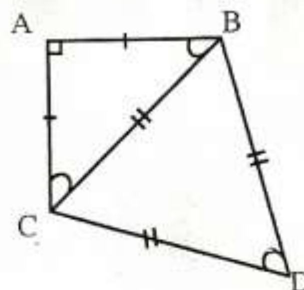
$\equiv -\frac{7\pi}{8}\ [2\pi]$

الأفصول المنحني الرئيسي لـ E هو $-\frac{7\pi}{8}$.



تمرين 5 :

نعتبر الشكل التالي :



اعط القياس الرئيسي لكل من الزوايا التالية :

$\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$,

$\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BD}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}}\right)$

الجواب :

* لدينا $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

القياس الرئيسي الزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$ هو $\frac{\pi}{4}$.

لدينا : $\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

إذن القياس الرئيسي للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}}\right)$ هو : $-\frac{\pi}{3}$

* لدينا $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

إذن القياس الرئيسي $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ هو : $-\frac{\pi}{2}$

لدينا $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BD}}\right) \equiv \left(\widehat{-\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}\right)[2\pi]$

$$\equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \pi + \frac{\pi}{3}[2\pi]$$
$$\equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi]$$
$$\equiv \frac{6\pi-2\pi}{3}[2\pi]$$
$$\equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

إذن القياس الرئيسي للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BD}}\right)$ هو : $-\frac{2\pi}{3}$

لدينا :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{bC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}[2\pi]$$
$$\equiv \frac{7\pi}{12}[2\pi]$$

إذن القياس الرئيسي للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}}\right)$ هو : $\frac{7\pi}{12}$

تمرين 6 :

ABC مثلث بين أن :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \pi[2\pi]$$

الجواب :

* لدينا $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$

$$\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)+\left(\widehat{-\overrightarrow{AC},-\overrightarrow{BC}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)[2\pi]$$

$$\equiv(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})+(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}})+(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})[2\pi]$$

$$\equiv(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}})+(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})\ [2\pi]$$

$$\equiv(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}})\ [2\pi]$$

$$\equiv(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}})\ [2\pi]$$

$$\equiv \pi+(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}})\ [2\pi]$$

$$\equiv \pi+0\ [2\pi]$$

إذن :

$$(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})+(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})+(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})\equiv\pi[2\pi]$$

تمرين 7 :

مثل على دائرة مثلثية النقط M_k التي أفاصيلها المنحنية هي الأعداد :

$$k\in\mathbb{Z}\ ,\ \frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$$

الجواب :

* لدينا $B\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$

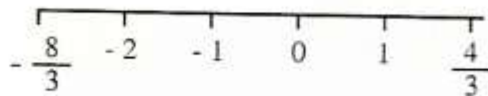
لنحدد قيم k التي من أجلها يكون $\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$ قياسا رئيسيا لـ M_k.

إذن $-\pi<\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$

أي أن $-1<\frac{1}{3}+\frac{k}{2}\leqslant 1$

إذن $-\frac{4}{3}<\frac{k}{2}\leqslant\frac{2}{3}$

أي أن $-\frac{8}{3}<k\leqslant\frac{4}{3}$



بما أن $k\in\mathbb{Z}$ فإن k تأخذ القيم -2 , -1 , 0 , 1.

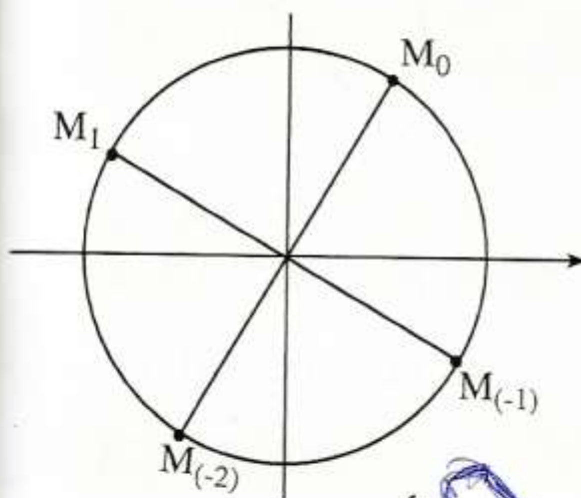
$k=0$ إذن $M_0\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$k=1$ إذن $M_1\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$k=-1$ إذن $M_{-1}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$k=-2$ إذن $M_{-2}\left(-\frac{2\pi}{6}\right)$

لتمثيل النقط M_k يكفي أن تمثيل النقط . M_0 , M_1 , M_{-1} و M_{-2}



تمرين 8 :

ليكن x من المجموعة $\mathbb{R}$ بسط مايلي :

$A(x)=2\sin^2(x)+3\cos^2(x)-1$

$B(x)=(\cos x+\sin x)^2-1$

$C(x)=\cos^2-\cos^2x\ .\ \sin^2x$

$D(x)=(2\cos x+\sin x)^2+(\cos x-2\sin x)^2$

$E(x)=\cos^5x+\cos^3x\ .\ \sin^2x$

$F(x)=\cos^4x-\cos^2x+\sin^2x-\sin^4x$

$G(x)=\cos^6x+\sin^6x+3\sin^2x\ .\ \cos^2x$

الجواب :

* لدينا $A(x) = 2\sin^2(x) + 3\cos^2(x) - 1$

$= 2\sin^2x + 3(1 - \sin^2x) - 1$

$= 2\sin^2x + 3 - 3\sin^2x - 1$

$= 2 - \sin^2x$

إذن : $\boxed{A(x) = 2 - \sin^2x}$

* لدينا $B(x) = (\cos x + \sin x)^2 - 1$

$= \cos^2x + \sin^2x + 2 \sin s \cos x - 1$

$= 1 + 2 \sin x . \cos x - 1$

$= 2 \sin x \cos x$

إذن : $\boxed{B(x) = 2\sin x . \cos x}$

* لدينا $C(x) = \cos^2 - \cos^2x . \sin^2x$

$= \cos^2x (1 - \sin^2x)$

$= \cos^2x . \cos^2x$

إذن : $\boxed{C(x) = \cos^4x}$

* لدينا

$D(x) = (2\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - 2\sin x)^2$

$= 4\cos^2x + \sin^2x + 4\cos x . \sin x + \cos^2x$

$+ 4\sin^2 x - 4\sin x \cos x$

$= 5\cos^2x + 5 \sin^2x$

$= 5(\cos^2x + \sin^2x)$

$= 5 \times 1$

إذن : $\boxed{D(x) = 5}$

* لدينا $E(x) = \cos^5x + \cos^3x . \sin^2x$

$= \cos^3 (\cos^2x + \sin^2x)$

$= \cos^3x . 1$

إذن : $\boxed{C(x) = \cos^3x}$

* لدينا

$F(x) = \cos^4 x - \cos^2x + \sin^2x - \sin^4x$

$= \cos^2x (\cos^2x - 1) + \sin^2x (1 - \sin^2x)$

$= \cos^2x .(- \sin^2x) + \sin^2x . \cos^2x$

$= - \cos^2x . \sin^2x + \sin^2x . \cos^2x$

$= 0$

إذن : $\boxed{F(x) = 0}$

* لدينا

$G(x) = \cos^6 x + \sin^6 x + 3\sin^2x . \cos^2x$

$= (\cos^2x)^3 + (\sin^2x)^3 + 3\sin^2x . \cos^2x$

$= (\cos^2x + \sin^2x) (\cos^4x - \cos^2x . \sin^2x +$

$\sin^4x) + 3\sin^2x . \cos^2x$

$= \cos^4x - \cos^2x . \sin^2x + \sin^4x + 3 \sin^2x . \cos^2x$

$= \cos^4x + \sin^4x + 2\sin^2x . \cos^2x$

$= (\cos^2x)^2 + (\sin^2x)^2 + 2\sin^2x . \cos^2x$

$= (\cos^2x + \sin^2x)^2$

$= 1^2$

$= 1$

إذن : $\boxed{F(x) = 1}$

تمرين 9 :

1 – ليكن x من المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
و $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{4}$ احسب $\cos x$ و $\tan x$.

2 – إذا علمت أن : $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

و $\cos x = -\frac{2}{3}$ فاحسب : $\sin x$ و $\tan x$.

3 – إذا علمت أن $\alpha \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$

و $\tan \alpha = \sqrt{7}$

فاحسب : $\cos \alpha$ و $\sin \alpha$.

4 – إذا علمت أن : $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

فاحسب $\cos \frac{5\pi}{12}$ ثم $\tan \frac{5\pi}{12}$.

الجواب :

1 – لدينا : $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{4}$

نعلم أن $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

أي أن $\cos^2 x + \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1$

إذن $\cos^2 x = 1 - \frac{5}{16}$

أي أن $\cos^2 x = \frac{11}{16}$

ومنه $\cos x = -\frac{\sqrt{11}}{4}$ أو $\cos x = \frac{\sqrt{11}}{4}$

وبما أن $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ فإن $\cos x \geqslant 0$.

ومنه $\cos x = \frac{\sqrt{11}}{4}$

نعلم أن لكل x من $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{4}}{\frac{\sqrt{11}}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{55}}{11}$$

2 – لدينا $\cos x = -\frac{2}{3}$.

نعلم أن $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

أي أن $\sin^2 x + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{4}{9}$$

$$\sin^2 x = \frac{5}{9}$$

ومنه $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ أو $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

وبما أن $\sin x \geqslant 0$ فإن $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

نعلم أن لكل x من $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

إذن : $\tan x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

3 – لدينا : $\tan \alpha = \sqrt{7}$

نعلم أن $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha}$

$$= \frac{1}{1+(\sqrt{7})^2}$$

$$= \frac{1}{8}$$

إذن $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{8}}$ أو $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{8}}$

$\cos \alpha = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$ أو $\cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\cos \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{4}$ أو $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

بما أن $\cos \alpha \leqslant 0$ فإن $\cos \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{4}$



نعلم أن $\tan\alpha = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

إذن $\sin\alpha = (\cos\alpha).(\tan\alpha)$

$\sin\alpha = \left(\dfrac{-\sqrt{2}}{4}\right)\times\sqrt{7} = -\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

4 – لدينا : $\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

نعلم أن $\cos^2\dfrac{5\pi}{12} + \sin^2\dfrac{5\pi}{12} = 1$

إذن $\sin^2\dfrac{5\pi}{12} + \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1$

$\sin^2\dfrac{5\pi}{12} = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$

$= 1 - \dfrac{8-2\sqrt{12}}{16}$

$= \dfrac{16-8+2\sqrt{12}}{16}$

$= \dfrac{8+2\sqrt{12}}{16}$

$= \left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$

إذن $\sin\dfrac{5\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

أو $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

وبما أن $0 < \dfrac{5\pi}{12} < \dfrac{\pi}{2}$ فإن $\sin\dfrac{5\pi}{12} > 0$

ومنه $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

لدينا $\tan\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sin\dfrac{5\pi}{12}}{\cos\dfrac{5\pi}{12}}$

$= \dfrac{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

$= \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$= \dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{6-2}$

$= \dfrac{8+2\sqrt{12}}{4}$

$= \dfrac{8+4\sqrt{3}}{4}$

$= \dfrac{4(2+\sqrt{3})}{4}$

إذن : $\tan\dfrac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$

تمرين 10

1 – احسب التعابير التالية :

$A = \sin^6 x + \cos^6 x - 2\sin^4 x - \cos^4 x + \sin^2 x$

$B = 2(\cos^6 x + \sin^6 x) - 3(\cos^4 x + \sin^4 x)$

$C = \sin^8 x + \cos^8 x + 6\sin^4 x \,.\, \cos^4 x + 4\sin^2 x \cos^2 x (\sin^4 x + \cos^4 x)$

$D = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$

$E = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x} + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} + \dfrac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{\sin x \,.\, \cos x}$

الجواب :

1 – لدينا :

$$A = \sin^6 x + \cos^6 x - 2\sin^4 x - \cos^4 x + \sin^2 x$$
$$= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 - 2\sin^4 x - \cos^4 x + \sin^2 x$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x) - 2\sin^4 x - \cos^4 x + \sin^2 x$$
$$= \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x - 2\sin^4 x - \cos^4 x + \sin^2 x$$
$$= - \sin^4 x + \sin^2 x - \sin^2 x \,.\, \cos^2 x$$
$$= \sin^2 x (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x \,.\, \cos^2 x$$
$$= \sin^2 x \,.\, \cos^2 x - \sin^2 x \,.\, \cos^2 x$$
$$= 0$$

$$\boxed{A = 0}$$

$$B = 2(\cos^6 x + \sin^6 x) - 3(\cos^4 x + \sin^4 x)$$
$$= 2(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x + \sin^4 x - \sin x^2 \cos^2 x) - 3(\cos^4 x + \sin^4 x)$$
$$= 2\cos^4 x + 2\sin^4 x - 2\sin^2 x \,.\, \cos^2 x - 3\cos^4 x - 3\sin^4 x$$
$$= - \cos^4 x - \sin^4 x - 2\sin^2 x \,.\, \cos^2 x$$

$= -(\cos^4x + \sin^4x + 2\sin^2x \cdot \cos^2x)$

$= -(\cos^2x + \sin^2x)^2 = -1$ $\boxed{B = -1}$

$C = \sin^8x + \cos^8x + 6\sin^4x \cdot \cos^4x + 4\sin^2x\cos^2x(\sin^4x + \cos^4x)$

$= (\sin^4x + \cos^4x)^2 - 2\sin^4x\cos^4x + 6\sin^4x\cos^4x + 4\sin^2x\cos^2x(\sin^4x + \cos^4x)$

$= (\sin^4x + \cos^4x)^2 + 4\sin^2x\cos^2x(\sin^4x + \cos^4x) + 4\sin^4x \cdot \cos^4x$

$= (\sin^4x + \cos^4x)(\sin^4x + \cos^4x + 2\sin^2x \cdot \cos^2x) + 2\sin^2x\cos^2x(\sin^4x + \cos^4x) + 4\sin^4x \cdot \cos^4x$

$= (\sin^4x + \cos^4x)(\sin^2x + \cos^2x)^2 + 2\sin^6x\cos^2x + 2\sin^2x \cdot \cos^6x + 4\sin^4x \cdot \cos^4x$

$= \sin^4x + \cos^4x + (2\sin^6x \cdot \cos^2x + 2\sin^4x\cos^4x) + (2\sin^2x\cos^6x + 2\sin^4\cos^4x)$

$= \sin^4x + \cos^4x + 2\sin^4x\cos^2x + 2\cos^4x \cdot \sin^2x(\cos^2x + \sin^2x)$

$= \sin^4x + \cos^4x + 2\cos^2x \cdot \sin^2x(\sin^2x + \cos^2x)$

$= (\sin^2x)^2 + (\cos^2x)^2 + 2\sin^2x \cdot \cos^2x$

$= (\sin^2x + \cos^2x)^2$

$= 1^2$

$= 1$ $\boxed{C = 1}$

$D = \sqrt{\sin^4x + 4\cos^2x} + \sqrt{\cos^4x + 4\sin^2x}$

$= \sqrt{\sin^4x + 4(1 - \sin^2x)} + \sqrt{\cos^4x + 4(1 - \cos^2x)}$

$= \sqrt{\sin^4x - 4\sin^2x + 4} + \sqrt{\cos^4x - 4\cos^2x + 4}$

$= \sqrt{(\sin^2x - 2)^2} + \sqrt{(\cos^2x - 2)^2}$

$= |\sin^2x - 2| + |\cos^2x - 2|$

$= 2 - \sin^2x + 2 - \cos^2x$

لأن $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ و $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

ومنه $0 \leqslant \cos^2x \leqslant 1$ و $0 \leqslant \sin^2x \leqslant 1$

إذن $\cos^2x - 2 \leqslant 0$ و $\sin^2x - 2 \leqslant 0$

إذن $D = 4 - (\sin^2 x + \cos^2 x)$
$= 4 - 1$
$= 3$

$$\boxed{D = 3}$$

$$E = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{\sin x \, . \cos x}$$

$$= \frac{\cos x\,(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} + \frac{\sin x\,(1 - \sin x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} + \frac{1 - \cos x - \sin x + \cos x \sin x}{\sin . \cos x}$$

$$= \frac{\cos x\,(1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} + \frac{\sin x\,(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} + \frac{1 - \cos x - \sin x + \sin x \cos x}{\sin . \cos x}$$

$$= \frac{\cos x\,(1 - \sin x)}{\cos^2 x} + \frac{\sin x\,(1 - \cos x)}{\sin^2 x} + \frac{1 - \cos x - \sin x + \sin x \cos x}{\sin . \cos x}$$

$$= \frac{1 - \sin x}{\cos x} + \frac{1 - \sin x}{\sin x} + \frac{1 - \cos x - \sin x + \sin x . \cos x}{\sin . \cos x}$$

$$= \frac{\sin x(1 - \sin x) + \cos x(1 - \cos x) + 1 - \cos x - \sin x + \sin x \cos x}{\sin . \cos x}$$

$$= \frac{\sin x - \sin^2 x + \cos x - \cos^2 x + 1 - \cos x - \sin x + \sin x \cos x}{\sin . \cos x}$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x) + 1 + \sin x . \cos x}{\sin . \cos x}$$

$$= \frac{\sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 1$$

تمرين 11:

1 – ليكن x من $\left]-\pi, \pi\right[/ \{0\}$ و $x \neq \frac{\pi}{2}$ و $x \neq -\frac{\pi}{2}$

بين أن : $\frac{1}{\tan^2(x)} - \cos^2(x) = \cos^2(x) \times \frac{1}{\tan^2(x)}$

2 – ليكن x و y من $\left[-\pi, \pi\right]$ ويخالفان $\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$

بين أن : $\sin^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} - \frac{1}{1 + \tan^2 x}$

الجواب :

1 –

$$\frac{1}{\tan^2(x)} - \cos^2 x = \frac{1}{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2 x}} - \cos^2 x$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x$$

$$= \cos^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)$$

$$= \cos^2 x\left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}\right)$$

$$= \cos^2 x\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$$

إذن

$$(\cos^2 x) \times \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1}{\tan^2(x)} - \cos^2(x)$$

2 - لدينا

$$\sin^2 x - \sin^2 y = 1 - \cos^2 x - (1 - \cos^2 y)$$

$$= -\cos^2 x + \cos^2 y$$

$$= \cos^2 y - \cos^2 x$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 y} - \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

تمرين 12 :

1 – ليكن x من المجال $[0, \pi] / \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

حدد بدلالة tan(x) مايلي :

$$A = 2\sin x \cos x\,(1 - 2\sin^2 x)$$

$$B = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} \; ; \; x \neq \frac{\pi}{4}$$

$$C = \cos^4 x - \sin^4 x + \cos^2 x - \sin^2 x$$

الجواب :

لدينا : $A = 2\sin x \cos x\,(1 - 2\sin^2 x)$

$$= 2(\tan x \cos x) . \cos x\,(1 - 2\,(1 - \cos^2 x))$$

$$= 2\tan x . \cos^2 x\,(2\cos^2 x - 1)$$

$$= 2\tan x\left(\frac{1}{1 + \tan^2 x}\right)\left(\frac{2}{1 + \tan^2 x} - 1\right)$$

$$= 2\tan x\left(\frac{1}{1 + \tan^2 x}\right)\left(\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}\right)$$

$$= \frac{2(\tan x)\,(1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)^2}$$

إذن

$$\boxed{A = \frac{2(\tan x)\,(1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)^2}}$$

* لدينا :

$$B = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x}$$

$$= \frac{(\sin x - \cos x)\,(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\sin x - \cos x}$$

$$= \sin^2 x + \sin x . \cos x + \cos^2 x$$

$$= 1 - \cos^2 x + \sin x . \cos x + \cos^2 x$$

$$= 1 - \sin x . \cos x$$

$$= 1 - (\tan x)(\cos x) . \cos x$$

$$= 1 - \tan x \times \cos^2 x$$

$$= 1 - \tan x \times \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$= 1 - \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$= \frac{1 + \tan^2 x - \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

إذن

$$\boxed{B = \frac{\tan^2 x - \tan x + 1}{\tan^2 x + 1}}$$

$= \cos\left(4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right)$
$-2\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right)$
$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$= -\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} - 2\sin\frac{\pi}{2}$
$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 2 \times 1$
$= -1 - 2$

إذن $\boxed{A = -3}$

$B = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \times \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$
$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \times \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$
$= \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) \times \left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) \times \left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) \times \left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)$
$= \left(\cos\frac{\pi}{4}\right) \times \left(\sin\frac{\pi}{3}\right) \times \left(\cos\frac{\pi}{6}\right) \times \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
$= \frac{2 \times \sqrt{2}}{2 \times 8} = \frac{\sqrt{3}}{8}$

$\boxed{B = \frac{\sqrt{3}}{8}}$

لدينا :
$C = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) \times \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
$= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \times \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \times \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$
$= -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$
$= \sqrt{3} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$
$= \frac{-3}{3}$
$= -1$

إذن $\boxed{C = -1}$

* لدينا :
$C = \cos^4 x - \sin^4 x + \cos^2 x - \sin^2 x$
$= (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2 + \cos^2 x - \sin^2 x$
$= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos^2 x - \sin^2 x$
$= \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x$
$= 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$
$= 2(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x)$
$= 2(2\cos^2 x - 1)$
$= 2\left(\frac{2}{1 + \tan^2 x} - 1\right)$
$= 2\left(\frac{2 - 1 - \tan^2 x}{1 + \tan 2x}\right)$

إذن $\boxed{C = \frac{2(1 - \tan^2 x)}{1 + \tan^2 x}}$

تمرين 13 :

احسب مايلي :

$A = \cos\left(\frac{14\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{23\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)$
$B = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \times \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$
$C = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) \times \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

الجواب :

لدينا :
$A = \cos\left(\frac{12\pi + 2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{24\pi - \pi}{6}\right)$
$- 2\sin\left(\frac{8\pi + \pi}{2}\right)$

تمرين 14 :

احسب مايلي :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$B = \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$C = \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

الجواب :

لدينا :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{7\pi - 2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{7\pi - 2\pi}{7}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

$= 0$ إذن $\boxed{A = 0}$

$$B = \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \tan\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) + \tan\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

$= 0$ إذن $\boxed{}$



$= 2 \times 1 = 2$

إذن $\boxed{C = 2}$

تمرين 15 :

نعتبر التعابير التالية :

$$A = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$$

$$B = \sin\left(\frac{11\pi}{26}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{26}\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{13}\right)$$

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

احسب A و B و C.

الجواب :

لدينا :

$$A = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$$

$$= \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{14}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$= 0$

إذن $\boxed{A = 0}$

لدينا :

$$B = \sin\left(\frac{11\pi}{26}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{26}\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{13}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{13\pi - 2\pi}{26}\right) + \sin\left(\frac{13\pi - 10\pi}{26}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{13}\right) + \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{13}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{13}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{13}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{13}\right) + \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{13}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} - \cos\frac{\pi}{13} - \cos\frac{5\pi}{13}$$

$= 0$

إذن $\boxed{B = 0}$

لدينا :

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{14}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{7\pi + \pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{7\pi + 3\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{7\pi + 5\pi}{14}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{14}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) - \sin\frac{3\pi}{14} - \sin\frac{5\pi}{14}$$



$= 0$ إذن $\boxed{C = 0}$

تمرين 16 :

حسب مايلي :

$$A = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$$

$$B = \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\frac{6\pi}{7} + \cos^2\frac{8\pi}{9}$$

الجواب :

$$A = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$$

$$= \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}$$

$$= 2\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\right)$$

$= 2 \times 1 = 2$ إذن $\boxed{A = 2}$

$$B = \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\frac{6\pi}{7} + \cos^2\frac{8\pi}{9}$$

$$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right)$$

$$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{9} + \left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(-\cos^2\frac{\pi}{9}\right)^2$$

$$= \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

$$= \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) + \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)$$

$= 1 + 1 = 2$ $\boxed{B = 2}$



تمرين 17:

نعلم أن : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

1) – احسب $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{3\pi}{8}$.

2) – استنتج : $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$

3) – احسب $\cos\left(\frac{513\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{37\pi}{8}\right)$

و $\tan\left(\frac{25\pi}{8}\right)$

الجواب :

1) – نعلم أن : $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$

أي أن $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{4-2-\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ أو $\sin\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

بما أن $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ فإن $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{8}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

إذن $\boxed{\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

2) - لدينا $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

إذن $\boxed{\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)=-\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

إذن $\boxed{\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

3) - $\cos\left(\frac{513\pi}{8}\right)$

$$=\cos\left(\frac{512\pi+\pi}{8}\right)$$

$$=\cos\left(64\pi+\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

إذن $\cos\left(\frac{513\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

لدينا $\sin\left(\frac{37\pi}{8}\right)$

$$=\sin\left(\frac{40\pi-3\pi}{8}\right)$$

$$=\sin\left(5\pi-\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$=\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)$$

$= \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

$= \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{8}$

إذن $\sin\left(\frac{37\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

لدينا

$\tan\left(\frac{25\pi}{8}\right) = \tan\left(\frac{24\pi + \pi}{8}\right)$

$= \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{8}\right)$

$= \tan\frac{\pi}{8}$

$= \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\,.\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4-2}}$

$= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$

$= \sqrt{2} - 1$

إذن $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

تمرين 17 :

ليكن x من المجال $[0,\pi]$ و $x \neq \frac{\pi}{2}$

نضع

$P(x)=2\left[1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]-\cos(\pi-x)\sin(\pi+x)$

1 – بسط $P(x)$ ثم احسب $P(0)$ و $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

2 – أ – بين أن : $P(x) = \frac{2-\tan x}{1+\tan^2 x}$

ب – احسب $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $P(x)$.

3 – إذا علمت أن $P(x) = 2$ و $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ فاحسب tan x واستنتج x.

الجواب :

- 1

$P(x)=2\left[1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]-\cos(\pi-x)\sin(\pi+x)$

$= 2\left[1 - (-\sin x)^2\right] - (-\cos x)(-\sin x)$

$= 2(1 - \sin^2 x) - (-\cos x) \times (-\sin x)$

$= 2\cos^2 x - \cos x \,.\, \sin x$

إذن $P(x) = 2\cos^2 x - \cos x \,.\, \sin x$

لدينا $P(0) = 2\cos^2 0 - (\cos 0) \times (\sin 0)$

$= 2 \times 1 - 1 \times 0$

$= 2$

إذن $P(0) = 2$

$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{4} - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$



$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 1 - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$ $\qquad P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

2 – أ –

لدينا $P(x) = 2\cos^2 x - \cos x \,.\, \sin x$

$= 2\cos^2 x - \tan x \,.\, \cos x \,.\, \cos x$

$= 2\cos^2 x - (\tan x) \,.\, \cos^2 x$

$= \cos^2 x \,.(2 - \tan x)$

$= \frac{1}{1 + \tan^2 x}(2 - \tan x)$

إذن $\boxed{P(x) = \frac{2 - \tan x}{1 + \tan^2 x}}$

ب – لدينا $P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2 - \tan\frac{\pi}{3}}{2 + \tan^2\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{2 - \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3})^2}$

$\boxed{P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$

$P(\pi) = \frac{2 - \tan \pi}{1 + \tan^2 \pi}$

$= \frac{2 - 0}{1 + 0^2}$

$= 2$

إذن $\boxed{P(\pi) = 2}$

3 - $P(x) = 2 \,;\, x \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right[$

لدينا $P(x) = 2$ تكافئ $\frac{2 - \tan x}{1 + \tan^2 x} = 2$

تكافئ $2 - \tan x = 2 + 2\tan^2 x$

$- \tan x = 2\tan^2 x$

أي أن $2\tan^2 x + \tan x = 0$

$\tan x\,(2\tan x + 1) = 0$

أي أن $\tan x = -\frac{1}{2}$ أو $\tan x = 0$

وبما أن $x \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right[$ فإن : $\tan x \geqslant 0$

إذن $\tan x = 0$

وبما أن $x \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right[$

فإن $x = 0$

تمرين 18:

ليكن x من المجال $]-\pi \,;\, \pi[$ و $x \neq \frac{\pi}{2}$

و $x \neq -\frac{\pi}{2}$

و $P(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

1 – بين أن $P(x) = 2\,(1 + 2\tan^2 x)$

2 – أ – احسب $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$

ب – استنتج $P\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ و $P\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ و $P\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

و $P\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

3 – إذا علمت أن : $P(x) = 14$

و $0 < x < \frac{\pi}{2}$ فاحسب $\tan x$ و $\cos x$ ثم $\sin x$

الجواب :

1 – لدينا : $P(x)=\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}+\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

$=\dfrac{(1-\sin x)^2+(1+\sin x)^2}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$=\dfrac{1+\sin^2 x-2\sin x+1+\sin^2 x+2\sin x}{1-\sin^2 x}$

$=\dfrac{2+2\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{2+2(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{4-2\cos^2 x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{2\left(2-\dfrac{1}{1+\tan^2 x}\right)}{\dfrac{1}{1+\tan^2 x}}$

$=\dfrac{2\left(\dfrac{2+2\tan^2 x-1}{1+\tan^2 x}\right)}{\dfrac{1}{1+\tan^2 x}}$

إذن $\boxed{P(x)=2(1+2\tan^2 x)}$

2 – أ – $P\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\left(1+2\tan^2\frac{\pi}{3}\right)$

$=2(1+2.(\sqrt{3})^2)$

$=2(1+6)$

إذن $\boxed{P\left(\frac{\pi}{3}\right)=14}$

$P\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\left(1+2\tan^2\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\left(1+2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)$

$=2\left(1+\frac{2}{3}\right)$

$=\frac{10}{3}$

إذن $\boxed{P\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{10}{3}}$

ب – لدينا $P(x)=P(\pi-x)=P(-x)$

لدينا $P\left(\frac{2\pi}{3}\right)=P\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=P\left(\frac{\pi}{3}\right)$

إذن $P\left(\frac{2\pi}{3}\right)=14$

لدينا $P\left(\frac{5\pi}{6}\right)=P\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=P\left(\frac{\pi}{6}\right)$

إذن $P\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{10}{3}$

$P\left(-\frac{\pi}{3}\right)=P\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$=14$

لدينا $P\left(-\frac{\pi}{6}\right)=P\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{10}{3}$

3 – لدينا : $P(x)=14$

$2(1+2\tan^2 x)=14$

$1+2\tan^2 x=7$

إذن $2\tan^2 x=6$

تكافئ $\tan^2 x=3$

$\tan x=\sqrt{3}$ أو $\tan x=-\sqrt{3}$

بما أن $0<x<\frac{\pi}{2}$ فإن $\tan x>0$

ومنه $\tan x = \sqrt{3}$

لدينا $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

$= \dfrac{1}{1+(\sqrt{3})^2}$

$= \dfrac{1}{4}$

$\cos x = \sqrt{\dfrac{1}{4}}$ أو $\cos x = -\sqrt{\dfrac{1}{4}}$

إذن $\cos x = \dfrac{1}{2}$ أو $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

وبما أن $\cos x > 0$ فإن $\cos x = \dfrac{1}{2}$

لدينا $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sin x = \tan x \cos x$

$= \sqrt{3} \times \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

إذن $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

تمرين 19 :

ليكن x عددا حقيقيا بحيث : $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$;

و $A(x) = \cos^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 2\sin^2 x$

1 – بين أن

$A(x) = \cos^2 x\,(1 + 3\tan x - 2\tan^2 x)$

2 – احسب $A(x)$ إذا علمت أن :

$\cos x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ و $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

الجواب :

لدينا

$A(x) = \cos^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 2\sin^2 x$

$= \cos^2 x\left(1 + \dfrac{3\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} - \dfrac{2\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)$

$= \cos^2 x\left(1 + \dfrac{3\sin x}{\cos x} - 2 \cdot \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2\right)$

إذن $A(x) = \cos^2 x\left(1 + 3\tan x - 2\tan^2 x\right)$

2 – لدينا $\cos x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

إذن $\cos^2 x = \dfrac{1}{5}$

ومنه $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 5$

أي أن $1 + \tan^2 x = 5$

إذن $\tan^2 x = 4$

ومنه $\tan x = 2$ أو $\tan x = -2$

وبما أن $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

فإن $\tan x > 0$

إذن $\tan x = 2$

ومنه

$A(x) = \dfrac{1}{5}(1 + 3 \times 2 - 2 \times 4)$

$= \dfrac{1}{5}(1 + 6 - 8)$

$= \dfrac{1}{5}$

إذن $\boxed{A(x) = \dfrac{1}{5}}$

تمرين 20 :

ليكن x من $\mathbb{R}$. نضع

$A(x) = 3\cos(3\pi + x) - 2\sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right)$

1 – احسب $A(x)$ بدلالة sinx و cosx.

2 – احسب $A(0)$. $A\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ و $A\left(\frac{13\pi}{3}\right)$.

3 – احسب $[A(x)]^2$ بدلالة tanx لكل x يخالف $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

الجواب :

1 – لدينا

$$A(x) = 3\cos(3\pi + x) - 2\sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right)$$

$$= 3\cos(2\pi + \pi + x) + 2\sin x + \cos\left(\frac{4\pi + \pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(\frac{8\pi + \pi}{2} - x\right)$$

$$= -3\cos x + 2\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= -3\cos x + 2\sin x - \sin x + 2\cos x$$

$$= \sin x - \cos x$$

إذن $\boxed{A(x) = \sin x - \cos x}$

2 – لدينا $A(0) = \sin 0 - \cos 0$

إذن $A(0) = -1$

لدينا $A\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$$= -\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}$$

$$= -1 - 0$$

إذن $\boxed{A\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1}$

لدينا $A\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{13\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)$

$$= \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

إذن $\boxed{A\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}}$

3 – لدينا $A(x) = \sin x - \cos x$

إذن $[A(x)]^2 = (\sin x - \cos x)^2$

$$= \sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x$$

$$= 1 - 2\sin x \cdot \cos x$$

$$= 1 - 2\tan x \cdot \cos x \cdot \cos x$$

$$= 1 - 2 \cdot \tan x \cdot \cos^2 x$$

$$= 1 - 2\tan x \times \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$= 1 - \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$= \frac{1 + \tan^2 x - 2\tan x}{1 + \tan^2 x}$$

إذن $[A(x)]^2 = \frac{(1 - \tan x)^2}{1 + \tan^2 x}$





تمرين 21 :

ليكن x من $]0 ; \pi[$. نضع

$$E(x) = \cos^2x + 3\cos x \,.\, \sin x - 2\sin^2x$$

1 – احسب $E(0)$ و $E(\pi)$.

2 – ليكن x من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

أ – بين أن $E(x) = -2 + 3\left(\frac{1+\tan x}{1+\tan^2x}\right)$

ب – إذا علمت أن $E(x) = 1$.

فاحسب tanx ثم cosx.

الجواب :

1 – لدينا

$$E(x) = \cos^2x + 3\cos x \,.\, \sin x - 2\sin^2x$$

$$E(0) = \cos^20 + 3\cos0 \,.\, \sin0 - 2\sin^20$$

إذن $= 1 + 3 \times 0 \times 1 - 2 \times 0^2$

$$\boxed{E(0) = 1}$$

$$E(\pi) = \cos^2\pi + 3(\cos\pi) \times (\sin\pi) - 2\sin^2\pi$$

$$= (-1)^2 + 3\,(-1)\,0 - 2\,.\,0^2$$

$$= 1$$

إذن $\boxed{E(\pi) = 1}$

2 – أ – لدينا

$$E(x) = \cos^2x + 3\cos x \,.\, \sin x - 2\sin^2x$$

$$= \cos^2x + 3\cos x \times \tan x \,.\, \cos x - 2(1 - \cos^2x)$$

$$= \cos^2x + 3\cos^2x \times \tan x - 2 + 2\cos^2x$$

$$= -2 + 3\cos^2x + 3\cos^2x \times \tan x$$

$$= -2 + 3\cos^2x(1 + \tan x)$$

$$= -2 + 3 \times \frac{1}{1+\tan^2x}(1 + \tan x)$$

إذن

$$\boxed{E(x) = -2 + 3 \times \left(\frac{1+\tan x}{1+\tan^2x}\right)}$$

ب – لدينا $E(x) = 1$

تكافئ $-2 + 3\,\frac{1+\tan x}{1+\tan^2x} = 1$

أي أن $3\left(\frac{1+\tan x}{1+\tan^2x}\right) = 3$

ومنه $\frac{1+\tan x}{1+\tan^2x} = 1$

إذن $1 + \tan x = 1 + \tan^2x$

أي أن $\tan x = \tan^2x$

أي أن $\tan x - \tan^2x = 0$

أي أن $\tan x\,(1 - \tan x) = 0$

إذن $\tan x = 1$ أو $\tan x = 0$

وبما أن $x \neq 0$ فإن $\tan x \neq 0$ و $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

إذن $\tan x = 1$

لدينا $\cos^2x = \frac{1}{1+\tan^2x}$

$$= \frac{1}{1+1}$$

$$\cos^2x = \frac{1}{2}$$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

وبما أن $0 < x < \frac{\pi}{2}$ فإن $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



تمرين 22:

ليكن x من $\mathbb{R}$. نضع

$A(x) = \cos^3 x + \sin^3 x + \cos(7\pi + x)$
$- \sin(x - 9\pi)$

1 – بين أن :

$A(x) = -(\sin(x) + \cos(x)) . \sin(x) . \cos(x)$

2 – احسب :

$A(0)$. $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$ و $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$

3 – أ – بين أن :

$A\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = A(x)$

ب – استنتج حساب : $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

الجواب :

1 – لدينا :

$A(x) = \cos^3 x + \sin^3 x + \cos(6\pi + \pi + x)$
$+ \sin(x - \pi - 8\pi)$
$= \cos^3 x + \sin^3 x + \cos(\pi + x) + \sin(x - \pi)$
$= (\cos x + \sin x) \times (\cos^2 x - \sin x \cos x +$
$\sin^2 x) - \cos x - \sin x$
$= (\cos x + \sin x) \times (1 - \sin x \cos x) -$
$(\cos x + \sin x)$
$= (\cos x + \sin x) \times (1 - \sin x . \cos x - 1)$
$= (\cos x + \sin x)\ (-\sin x . \cos x)$

إذن

$$\boxed{A(x) = -(\cos x + \sin x) \times \sin x . \cos x}$$

2 – لدينا

$A(0) = -(\sin 0 + \cos 0) \times \sin 0 \times \cos 0$
$= -1 \times 0 \times 1$
$= 0$

إذن $\boxed{A(0) = 0}$

لدينا

$A\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\frac{\pi}{4} . \cos\frac{\pi}{4}$
$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
$= -\sqrt{2} \times \frac{2}{4}$
$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن $\boxed{A\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$

لدينا

$A\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\left(\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}\right) \times \sin\frac{\pi}{3} . \cos\frac{\pi}{3}$
$= -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$
$= -\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{4}$

إذن $\boxed{A\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-(3 + \sqrt{3})}{8}}$

3 – أ – لدينا :

$A\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] .$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$= -(\cos x + \sin x) \cos x \sin x$
$= A(x)$

إذن $A\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=A(x)$

ب – لدينا $\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$

إذن $A\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=A\left(\frac{\pi}{2}\right)$

ومنه $A(0)=A\left(\frac{\pi}{2}\right)$

إذن $A\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

لدينا $\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$

إذن $A\left(\frac{\pi}{6}\right)=A\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

ومنه $A\left(\frac{\pi}{6}\right)=A\left(\frac{\pi}{3}\right)$

وبما أن $A\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-(3+\sqrt{3})}{8}$

فإن $A\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-(3+\sqrt{3})}{8}$

تمرين 23:

علما أن : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

1 - أحسب $\sin\frac{\pi}{5}$ ، $\cos\frac{4\pi}{5}$ ، $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

2 - احسب $\cos\frac{7\pi}{10}$ ، $\sin\frac{-3\pi}{10}$ و $\tan\frac{3\pi}{10}$

3 - $\sin\frac{-84\pi}{10}$; $\cos\frac{101\pi}{10}$

الجواب :

1 - نعلم أن

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$$

تكافئ $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2+\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$

أي أ– $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}$

$$\sin^2\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

أو $\sin\frac{\pi}{5}=-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

وبما أن $0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$

فإن $\sin\frac{\pi}{5}>0$

ومنه $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$

لدينا $\cos\frac{4\pi}{5}=\cos\left(\frac{5\pi-\pi}{5}\right)$

$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)$$

$$=-\cos\frac{\pi}{5}$$

$$=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

لدينا $\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\left(\frac{5\pi-\pi}{5}\right)$

$$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)$$

$$=+\sin\frac{\pi}{5}$$

$$=+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\boxed{\sin\frac{4\pi}{5}=+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

2 - $\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{10}+\frac{2\pi}{10}\right)$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= - \sin\frac{\pi}{5}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

$$\sin\left(\frac{-3\pi}{10}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$= - \sin\left(\frac{5\pi - 2\pi}{10}\right)$$

$$= - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= - \cos\frac{\pi}{5}$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{-3\pi}{10}\right) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \frac{\sin\frac{3\pi}{10}}{\cos\frac{3\pi}{10}} = \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{(\sqrt{5}+1)\times\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\times\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+1)\times\sqrt{2}\times\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{80}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{2}\times\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5+\sqrt{5}}}{20}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+1).\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{\sqrt{5}+5}}{20}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+5)\sqrt{2}\,.\,\sqrt{5+\sqrt{5}}}{20}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\times(\sqrt{5+\sqrt{5}}^{3})}{20}$$

3 - لدينا

$$\sin\left(-\frac{84\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{-85\pi+\pi}{5}\right)$$

$$= \sin\left(-17\pi + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \sin\left(-18\pi + \pi + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

إذن $\sin\left(-\frac{84\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

لدينا

$$\cos\left(\frac{101\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{100\pi+\pi}{5}\right)$$

$$= \cos\left(20\pi + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{5}$$

إذن $\cos\left(\frac{101\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

تمرين 24:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

* $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
* $2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$
* $\sqrt{3} - 2\cos 2x = 0$
* $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$



الجواب :

لدينا $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

تكافئ $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$

أي أن $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

إذن

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

لدينا $2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

تكافئ $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

أي $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$

إذن $\begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

إذن $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

إذن $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

إذن

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

لدينا $\sqrt{3} - 2\cos 2x = 0$

أي أن $-2\cos 2x = -\sqrt{3}$

$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{6}$

أي أن $\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ أو $k \in \mathbb{Z}$

أي أن $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

$$S = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

لدينا $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

أي أن $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{4}$

إذن $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k\pi$

مع $k \in \mathbb{Z}$

إذن $2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + k\pi$

$k \in \mathbb{Z}, 2x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

إذن $k \in \mathbb{Z}, x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$

$$S = \left\{\frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

تمرين 25:

حل في R المعادلات التالية :

* $2.\cos 3x = -\sqrt{3}$
* $\sqrt{2} + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
* $\sqrt{3} + \tan 2x = 0$

الجواب :

لدينا $2.\cos 3x = -\sqrt{3}$

أي أن $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن $\cos 3x = -\cos\frac{\pi}{6}$

أي أن $\cos 3x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

إذن $\cos 3x = \cos\frac{5\pi}{6}$

أي أن $k \in \mathbb{Z}$, $\begin{cases} 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ 3x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

أي أن $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ \text{أو} \\ x = -\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

مع $k \in \mathbb{Z}$

إذن

$$S = \left\{\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

لدينا $\sqrt{2} + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

تكافئ $2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

أي أن $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

أي أن $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4}$

إذن $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

إذن $x - \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

أو $k \in \mathbb{Z}$, $x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

إذن $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ أو $x = 2k\pi$

إذن

$$S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

لدينا $\sqrt{3} + \tan 2x = 0$

تكافئ $\tan 2x = -\sqrt{3}$

أي أن $\tan 2x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

أي أن $k \in \mathbb{Z}$, $2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

إذن $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$

إذن $S = \left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}$

تمرين 26 :

1- حل في المجال $[0 ; 2\pi]$ المعادلة :

$$2\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 1$$

2- حل في المجال $[-\pi ; 2\pi]$ المعادلة :

$$2\sin\frac{x}{2} = \sqrt{2}$$

3- حل في المجال $[-\pi ; \pi]$ المعادلة :

$$\cos^2 x + \cos x = 0$$

4 - حل في المجال $[0 ; 3\pi]$ المعادلة :

$$\sin^2 x - 2\sin x = 0$$

الجواب :

1- لدينا $2\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 1$

أي أن $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

$\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3}$

أي أن $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

أو $x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

أي أن $k \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} x = 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

* لدينا $x = 2\pi k$ و $x \in [0 ; 2\pi]$

إذن $0 \leqslant 2\pi k \leqslant 2\pi$

أي أن $0 \leqslant 2k \leqslant 2$

ومنه $0 \leqslant k \leqslant 1$

وبما أن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $k = 1$ أو $k = 0$

إذا كان $k = 0$ فإن $x = 0$

إذا كان $k = 1$ فإن $x = 2\pi$

*لدينا كذلك $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

و $x \in [0 ; 2\pi]$

إذن $0 \leqslant -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 2\pi$

إذن $0 \leqslant -\frac{2}{3} + 2k \leqslant 2$

ومنه $\frac{2}{3} \leqslant 2k \leqslant \frac{8}{3}$

إذن $\frac{1}{3} \leqslant k \leqslant \frac{4}{3}$

وبما أن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $k = 1$ إذن

إذا كان $k = 1$ فإن $k = \frac{4\pi}{3}$

إذن $S = \left\{0 ; 2\pi , \frac{4\pi}{3}\right\}$

-2 لدينا $2\sin\frac{x}{2} = \sqrt{2}$

$\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

أي أن $\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

أي أن $k \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ \frac{x}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

أي أن $k \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 4k\pi \\ \text{أو} \\ x = \frac{3\pi}{2} + 4k\pi \end{cases}$

*لدينا $x = \frac{\pi}{2} + 4k\pi$ و $x \in [-\pi ; 2\pi]$

إذن $-\pi \leqslant \frac{\pi}{2} + 4k\pi \leqslant 2\pi$

أي أن $-1 \leqslant \frac{1}{2} + 4k \leqslant 2$

$-\frac{3}{2} \leqslant 4k \leqslant \frac{3}{2}$

إذن $-\frac{3}{8} \leqslant k \leqslant \frac{3}{8}$

وبما أن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $k = 0$

ومنه $x = \frac{\pi}{2}$

*لدينا $x = \frac{3\pi}{2} + 4k\pi$ و $x \in [-\pi ; 2\pi]$

إذن $-\pi \leqslant \frac{3\pi}{2} + 4k\pi \leqslant 2\pi$

أي أن $-1 \leqslant \frac{3}{2} + 4k\pi \leqslant 2$

ومنه $-\frac{5}{2} \leqslant 4k \leqslant \frac{1}{2}$

$-\frac{5}{8} \leqslant k \leqslant \frac{1}{8}$

وبما أن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $k = 0$

ومنه $x = \frac{3\pi}{2}$

إذن $S = \left\{\frac{3\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right\}$

3 - لدينا $\cos^2 x + \cos x = 0$

تكافئ $\cos x(\cos x + 1) = 0$

أي أن $\cos x + 1 = 0$ أو $\cos x = 0$

أي أن $\cos x = -1$ أو $\cos x = 0$

إذن $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $x = \pi + 2k\pi$

مع $k \in \mathbb{Z}$

* لدينا $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $x \in [-\pi ; \pi]$

إذن $-\pi \leqslant \frac{\pi}{2} + k\pi \leqslant \pi$

$-1 \leqslant \frac{1}{2} + k \leqslant 1$

$-\frac{3}{2} \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}$

$k \in \mathbb{Z}$ إذن $k = -1$ أو $k = 0$

$k = -1$ إذن $x = \frac{-\pi}{2}$

$k = 0$ إذن $x = \frac{\pi}{2}$

* لدينا $x = \pi + 2k\pi$ و $x \in [-\pi ; \pi]$

إذن $-\pi \leqslant \pi + 2k\pi \leqslant \pi$

أي $-2 \leqslant 2k \leqslant 0$

$-1 \leqslant k \leqslant 0$

$k \in \mathbb{Z}$ إذن $k = 0$ أو $k = -1$

إذا كان $k = 0$ فإن $x = \pi$

إذا كان $k = -1$ فإن $x = -\pi$

إذن $S = \left\{\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} ; \pi ; -\pi\right\}$

4 - لدينا $\sin^2 x - 2\sin x = 0$

تكافئ $\sin x(\sin x - 2) = 0$

أي أن $\sin x = 2$ أو $\sin x = 0$

لا يمكن لأن $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ أو $x = k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

* لدينا $x = k\pi$ و $x \in [0 ; 3\pi]$

إذن $-0 \leqslant k\pi \leqslant 3\pi$

$0 \leqslant k \leqslant 3$

إذن $k = 0$ أو $k = 1$ أو $k = 2$ أو $k = 3$

إذا كان $k = 0$ فإن $x = 0$

إذا كان $k = 1$ فإن $x = \pi$

إذا كان $k = 2$ فإن $x = 2\pi$

إذا كان $k = 3$ فإن $x = 3\pi$

إذن $S = \left\{0 ; \pi ; 2\pi ; 3\pi\right\}$

تمرين 27:

1) - حل في المجال $[0 , 2\pi]$

$\cos(x) = \sin(x)$

2) - حل في المجال $[-\pi , 0]$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin(x)$

3) - حل في المجال $\left]-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right[$

$\tan(x) = \sin(x)$

الجواب :

1) - لدينا $\cos(x) = \sin(x)$

تكافئ $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

أي أن $x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$

أو $x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

أي أن $x + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

أو $x - x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

أي أن $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



لايمكن $0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

إذن $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

لدينا $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ و $x \in [0, 2\pi]$

إذن $0 \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant 2\pi$

$0 \leqslant \frac{1}{4} + k \leqslant 2$

أي أن $-\frac{1}{4} \leqslant k \leqslant \frac{7}{4}$

بما أن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $k = 0$ أو $k = 1$

إذا كان $k = 0$ فإن $x = \frac{\pi}{4}$

إذا كان $k = 1$ فإن $x = \frac{5\pi}{4}$

إذن $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

2) - لدينا $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin(x)$

تكافئ $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin(-x)$

أي أن $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

إذن $\begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $x - x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x + x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

لايمكن $0 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

إذن $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

إذن $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

بما أن $x \in [-\pi, 0]$ و $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$

فإن $-\pi \leqslant -\frac{\pi}{12} + k\pi \leqslant 0$

$-1 \leqslant -\frac{1}{12} + k \leqslant 0$

إذن $-\frac{11}{12} \leqslant k \leqslant \frac{1}{12}$

بما أن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $k = 0$

إذن $S = \left\{-\frac{11}{12}\right\}$

1) - لدينا $(E): \tan(x) = \sin(x)$

$x \in D_E$ تكافئ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

لدينا (E) تكافئ $\frac{\sin x}{\cos x} = \sin(x)$

أي أن $\sin x = \cos x \cdot \sin x$

أي أن $\sin x - \cos x \cdot \sin x = 0$

أي أن $\sin x(1 - \cos x) = 0$

تكافئ $1 - \cos x = 0$ أو $\sin x = 0$

ومنه $\cos x = 1$ أو $\sin x = 0$

أي أن $x = 2k\pi$ أو $x = k\pi$

إذن $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

بما أن $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ و $x = k\pi$

فإن $-\frac{\pi}{2} \leqslant k\pi \leqslant \frac{\pi}{2}$

$-\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}$

بما أن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $k = 0$

إذن $x = 0$

إذن $S = \{0\}$



تمرين 28:

1) - حل في R المعادلة :

$(E) \quad 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$

2) - حل في R المعادلة :

$(E') \quad 2\sin^2 x + (2-\sqrt{2})\sin x - \sqrt{2} = 0$

3) - حل في R المعادلة :

$(E'') \quad \tan^2 x + (\sqrt{3}-1)\tan x - \sqrt{3} = 0$

الجواب :

1) - لدينا $2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$

نضع $X = \cos x$

إذن (E) تكافئ $2X^2 - 5X - 3 = 0$

$\Delta = 25 + 24 = 49$

لدينا $\sqrt{\Delta} = 7$

إذن $X = \frac{5-7}{4}$ أو $X = \frac{5+7}{4}$

أي أن $X = -\frac{1}{2}$ أو $X = 3$

أي أن $\cos x = -\frac{1}{2}$ أو $\cos x = 3$

$\cos x = 3$ لا يمكن

أو $\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}$$

$S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbf{Z}\right\}$

2) - لدينا

$(E') \quad 2\sin^2 x + (2-\sqrt{2})\sin x - \sqrt{2} = 0$

نضع $X = \sin x$

إذن (E') تكافئ $2X^2 + (2-\sqrt{2})X - \sqrt{2} = 0$

$\Delta = (2-\sqrt{2})^2 - 4 \times 2(-\sqrt{2})$

$= 2^2 - 4\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 + 8\sqrt{2}$

$= 2^2 + 4\sqrt{2} + \sqrt{2}^2$

$= (2+\sqrt{2})^2$

إذن $\sqrt{\Delta} = 2 + \sqrt{2}$

$X = \frac{-2+\sqrt{2}-2-\sqrt{2}}{4}$ أو $X = \frac{-2+\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{4}$

أي أن $X = -1$ أو $X = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x = -1$ أو $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

تكافئ $\sin x = -1$ أو $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

أو $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

إذن

$S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbf{Z}\right\}$

3) - لدينا

$(E'') \quad \tan^2 x + (\sqrt{3}-1)\tan x - \sqrt{3} = 0$

$x \in D_{(E'')}$ تكافئ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbf{Z}$

نضع $X = \tan x$

إذن (E'') تكافئ $X^2 + (\sqrt{3}-1)X - \sqrt{3} = 0$

$$\Delta = (\sqrt{3} - 1)^2 + 4\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} + 1^2 + 4\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1^2$$
$$= (\sqrt{3} + 1)^2$$

إذن $\sqrt{\Delta} = \sqrt{3} + 1$

ومنه $X = \dfrac{-\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 1}{2} = 1$

أو $X = \dfrac{-\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - 1}{2} = -\sqrt{3}$

إذن $\tan x = -\sqrt{3}$ أو $\tan x = 1$

أي أن $\tan x = -\tan\dfrac{\pi}{3}$ أو $\tan x = \tan\dfrac{\pi}{4}$

أي أن $\tan x = \tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ أو $\tan x = \tan\dfrac{\pi}{4}$

ومنه $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$ أو

$x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

تمرين 29:

1 – حل في المجال : $[0, 2\pi]$

المتراجحة : $-1 + 2\cos x \geqslant 0$

2 - حل في المجال : $[0, 2\pi]$ المتراجحة :

$-2\sin x + \sqrt{2} < 0$

3 - حل في المجال : $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

المتراجحة : $\sqrt{3} - \tan x \leqslant 0$

الجواب :

$$(I) \quad \begin{cases} x \in [0, 2\pi] \\ -1 + 2\cos x \geqslant 0 \end{cases}$$

نعتبر المعادلة : $-1 + 2\cos x = 0$

أي أن $\cos x = \dfrac{1}{2}$

إذن $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{3}$

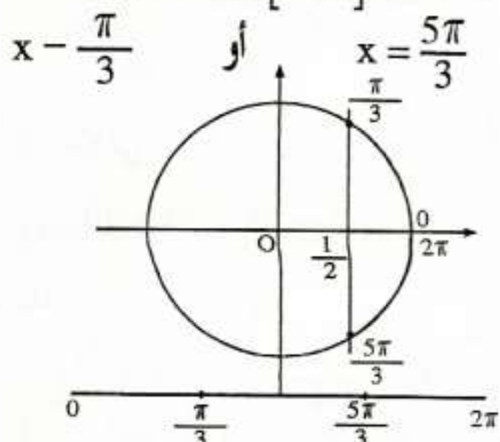
إذن :

$x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

وبما أن $x \in [0, 2\pi]$ فإن :

$x = \dfrac{5\pi}{3}$ أو $x = \dfrac{\pi}{3}$



(I) تكافئ $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$ أي أن

$\dfrac{5\pi}{3} \leqslant x \leqslant 2\pi$ أو $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$

إذن $S = \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

2 - لدينا

$$(I') \quad \begin{cases} x \in [-\pi, \pi] \\ -2\sin x + \sqrt{2} < 0 \end{cases}$$

تكافئ :

$$(I') \quad \begin{cases} x \in [-\pi, \pi] \\ \sin x > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



نعتبر المعادلة : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

أي أن $\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$

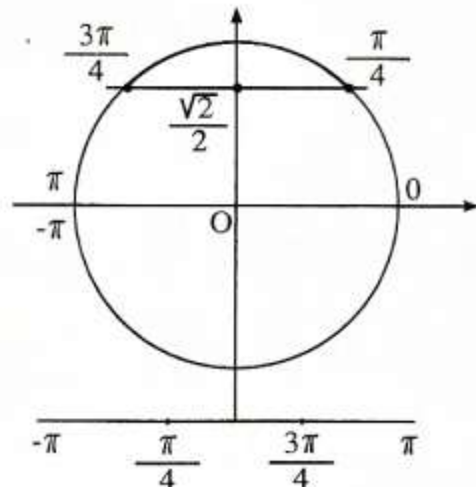
إذن :

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

وبما أن $x \in [-\pi, \pi]$ فإن :

$x = \frac{\pi}{4}$ أو $x = \frac{3\pi}{4}$



(I') تكافئ $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

أي أن $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

إذن $S = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$

2 - لدينا

$$(I'')\quad \begin{cases} x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \sqrt{3} - \tan x \leqslant 0 \end{cases}$$

نعتبر المعادلة : $\sqrt{3} - \tan x = 0$

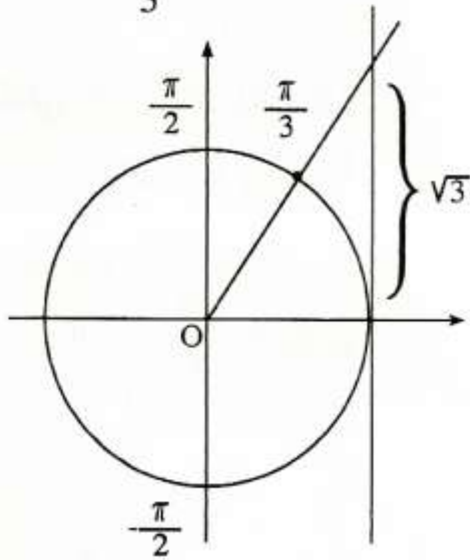
تكافئ : $\tan x = \sqrt{3}$

أي أن $\tan x = \tan\frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \,,\ k \in \mathbb{Z}$

بما أن $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ فإن :

$x = \frac{\pi}{3}$



(I'') تكافئ $\tan x \geqslant \sqrt{3}$

أي أن $\frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$

إذن $S = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$

تمرين 30 :

1 - حل في المجال $[0, 2\pi]$

المتراجحة : $2\cos x(2x) \geqslant \sqrt{3}$

2 - حل في المجال $[-\pi, \pi]$

المتراجحة : $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

3 - حل في المجال $[0, \pi[$

$\tan\frac{x}{2} < 1$

الجواب :

(I) : $\begin{cases} x \in [0,\pi] \\ 2\cos x(2x) \geqslant \sqrt{3} \end{cases}$

نضع $X = 2x$

$x \in [0,\pi]$ $\quad$ $X \in [0,2\pi]$

(I) تكافئ : $\begin{cases} X \in [0,2\pi] \\ 2\cos x\, X \geqslant \sqrt{3} \end{cases}$

نعتبر المعادلة : $2\cos x\, X = \sqrt{3}$

أي أن $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن $\cos X = \cos\frac{\pi}{6}$

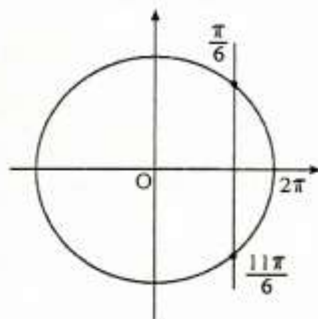
إذن :

$X = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $X = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

مع $k \in \mathbb{Z}$

بما أن $X \in [0,2\pi]$ فإن :

$X = \frac{11\pi}{6}$ أو $X = \frac{\pi}{6}$



(I') تكافئ $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

أي أن : $\frac{11\pi}{6} < X < 2\pi$ أو $0 < X < \frac{\pi}{6}$

أي أن : $\frac{11\pi}{6} < 2x < 2\pi$ أو $0 < 2x < \frac{\pi}{6}$

إذن : $\frac{11\pi}{12} < x < \pi$ أو $0 < x < \frac{\pi}{12}$

إذن : $S = \left[\frac{\pi}{4} , \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12}, \pi\right]$

2 - لدينا

(I') $\begin{cases} x \in [-\pi , \pi] \\ \sin(2x + \frac{\pi}{4}) < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

نعتبر المعادلة : $X = 2x + \frac{\pi}{4}$

لدينا : $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

أو $-2\pi \leqslant 2x \leqslant -2\pi$

أي أن : $-\frac{7\pi}{4} \leqslant 2x + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{9\pi}{4}$

(I) : $\begin{cases} X \in \left[-\frac{7\pi}{4} , \frac{9\pi}{4}\right] \\ \sin X < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

نعتبر المعادلة : $\sin X = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin X = \sin\frac{\pi}{4}$

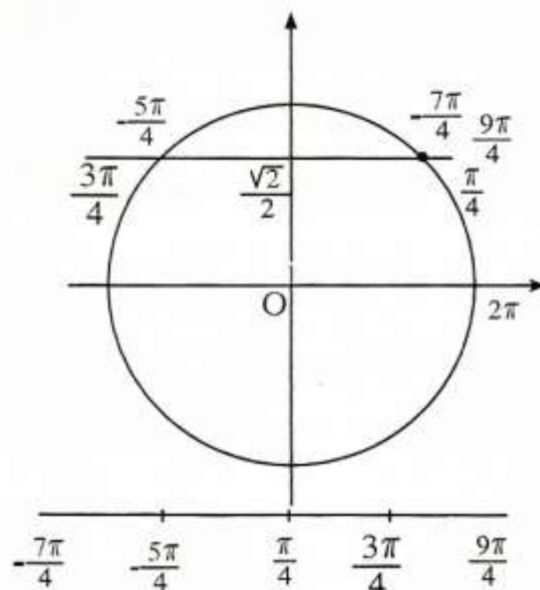
$X = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ أو $X = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

مع $k \in \mathbb{Z}$

بما أن $X \in \left[-\frac{7\pi}{4} , \frac{9\pi}{4}\right]$ فإن :

أو $X = \frac{9\pi}{4}$ أو $X = -\frac{7\pi}{4}$ أو $X = \frac{\pi}{4}$

$X = \frac{3\pi}{4}$ أو $X = -\frac{5\pi}{4}$



(I') تكافئ $\sin X < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{5\pi}{4} < X < \frac{\pi}{4}$ أو $\frac{3\pi}{4} < X < \frac{9\pi}{4}$

أي أن : $\frac{3\pi}{4} < 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{4}$

أو $-\frac{5\pi}{4} < 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$

أي أن : $\frac{\pi}{2} < 2x < 2\pi$ أو $-\frac{3\pi}{2} < 2x < 0$

أي أن : $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ أو $-\frac{3\pi}{2} < x < 0$

إذن : $S = \left[-\frac{3\pi}{2}\ , 0\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}\ , \pi\right]$

3 - لدينا $(I'') : \begin{cases} x \in [0, \pi] \\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) < 1 \end{cases}$

لنضع $X = \frac{x}{2}$

$x \in [0, \pi]$ إذن $X \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

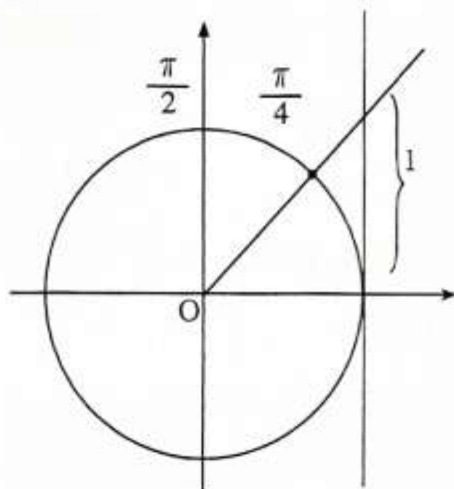
(I'') تكافئ $\begin{cases} X \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \tan X < 1 \end{cases}$

نعتبر المعادلة : $\tan X = 1$

$\tan X = \tan\frac{\pi}{4}$

$X = \frac{\pi}{4} + k\pi \ , \ k \in \mathbf{Z}$

وبما أن $X \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ فإن : $X = \frac{\pi}{4}$



(I'') تكافئ $\tan X < 1$

أي أن : $0 \leqslant X < \frac{\pi}{4}$

أي أن : $0 \leqslant \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$

أي أن : $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$

إذن : $S = \left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$

تمرين 31:

ليكن لكل x من $\mathbb{R}$

$$Q(x) = -2\sin^2x + 3\sin x - 1$$

1 - أ – بين أن لكل x من $\mathbb{R}$.

$$Q(x) = (2\sin x - 1)(1 - \sin x)$$

ب – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x) = 0$

2 - أ – ادرس إشارة $Q(x)$ على $[-\pi, \pi]$ المجال

ب – استنتج حلول المتراجحة $Q(x) > 0$ على المجال $[-\pi, \pi]$

الجواب :

1 - أ- لدينا $(2\sin x - 1)(1 - 2\sin x)$

$= 2\sin x - 2\sin^2x - 1 + \sin x$

$= -2\sin^2x + 3\sin x - 1$

$= Q(x)$

إذن : $Q(x) = -2\sin^2x + 3\sin x - 1$

ب – $Q(x) = 0$ تكافئ

$(2\sin x - 1)(1 - \sin x) = 0$

أي أن $1 - \sin x = 0$ أو $2\sin x - 1 = 0$

أي أن $\sin x = 1$ أو $\sin x = \frac{1}{2}$

$\sin x = 1$ أو $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbf{Z}$

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbf{Z}\right\}$$

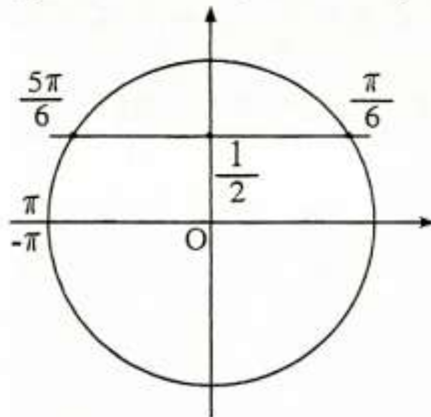
2 - أ – حلول المعادلة $Q(x) = 0$ على المجال $[-\pi, \pi]$ هي :

$x = \frac{\pi}{2}$ أو $x = \frac{5\pi}{6}$ أو $x = \frac{\pi}{6}$

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$1 - \sin x$		+		+	0	+		+	
$2\sin x - 1$		-	0	+		+	0	-	
$Q(x)$		-	0	+	0	+	0	-	

ملاحظة : $1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

إذن $\sin x \leqslant 1$ أي أن $0 \leqslant 1 - \sin x$



ب – $\begin{cases} x \in [-\pi, \pi] \\ Q(x) > 1 \end{cases}$

تكافئ : $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$ أو $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$

إذن $S = \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right[$

تمرين 32:

نعتبر لكل x من $\mathbb{R}$

$$P(x) = 2\cos^2 x + \cos x$$

1 - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P(x) = 0$

2 - أ- أدرس إشارة $P(x)$ لكل x من المجال $[0 , 2\pi]$

ب - استنتج حلول المتراجحة $P(x) \leqslant 0$ لكل x من $[0 , 2\pi]$

الجواب :

1 - $P(x) = 0$ تكافئ

$$2\cos^2 x + \cos x = 0$$

$$\cos x(2\cos x + 1) = 0$$

$\cos x = 0$ أو $2\cos x + 1 = 0$

$\cos x = 0$ أو $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\cos x = 0$ أو $\cos x = -\cos\frac{\pi}{3}$

$\cos x = 0$ أو $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

أو $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbf{Z}$

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbf{Z}\right\}$$

2 - أ- $P(x) = 0$ تكافئ

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

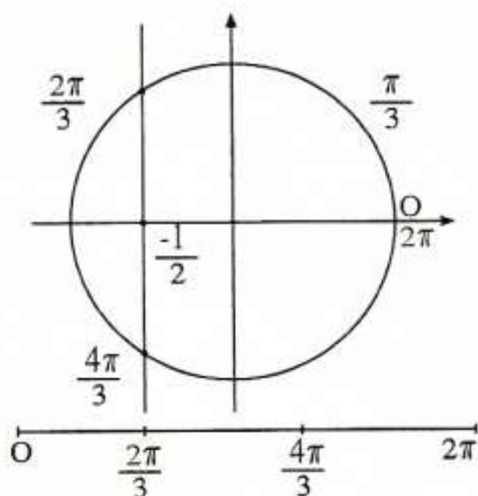
أو $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbf{Z}$

حلول المعادلة $P(x) = 0$ على المجال : $[0 , 2\pi]$ هي :

$x = \frac{4\pi}{3}$ أو $x = \frac{2\pi}{3}$ أو $x = \frac{3\pi}{2}$ أو $x = \frac{\pi}{2}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$		+	0	-		-		-	0	+	
$2\cos x+1$		+		+	0	-	0	+		+	
$P(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	



$P(x) \leqslant 0$ تكافئ

$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$ أو $\frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$

إذن $S = \left[\frac{\pi}{2} , \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3} , \frac{3\pi}{2}\right]$





تمرين 1 :

ليكن x من المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ حيث $\tan x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

1 - احسب cos x و sin x و $\cos\left(x - \frac{13\pi}{2}\right)$ و $\sin\left(\frac{98\pi}{2} - x\right)$

2 - احسب : $A = \sin(3\pi - x) + \cos\left(x - \frac{13\pi}{2}\right) - \tan(\pi - x)$

تمرين 2 :

نعتبر التعبير التالي : $g(x) = \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

1- احسب $g\left(\frac{17\pi}{4}\right)$ و $g\left(\frac{-3\pi}{2}\right)$ و $g\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ و $g\left(\frac{17\pi}{3}\right)$

2 - بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ $\quad g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = g\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

تمرين 3 :

1- ليكن x و y من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

بين أن : $\frac{1}{\tan^2 x} - \cos^2 x = \cos^2 x \times \frac{1}{\tan^2 x}$

2- أ - بين انه لكل x و y من $\mathbb{R}$

$$\cos^2 x \cdot \cos^2 y - \sin^2 x \cdot \sin^2 y = \cos^2 x - \sin^2 y$$

ب - استنتج أن : $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

تمرين 4 :

ليكن x من المجال $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ و $\cos x \cdot \sin x = \frac{2}{5}$

1 - احسب $\cos x + \sin x$ و $\cos x - \sin x$

2 - بين أن لكل n من N :

$$\cos^{2n} x + \sin^{2n} x = \frac{4^n + 1}{5^n}$$



3 – حدد قيمة $\cos(x)$ و $\sin(x)$.

تمرين 5 :

1 - ليكن x من $\mathbb{R}$: بسط التعبير التالي :

$$A(x) = \cos^2(7\pi - x) + \sin^2\left(\frac{13\pi}{2} - x\right) + 2\sin^2(-x)$$

2 - نضع: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ و $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

احسب $\cos\alpha$ و $\tan\alpha$

3 - أ – قارن العددين $\frac{5\pi}{9}$ و $\frac{\pi}{2}$

ب– استنتج اشا رة $\cos x \frac{5\pi}{9}$ و $\tan \frac{5\pi}{9}$

تمرين 6 :

1- علما أن : $\sin x = 0{,}8$ و $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$

فاحسب : $\cos x$ و $\tan x$

2 - علما أن : $\sin x = 0{,}6$ و $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$ فاحسب $\cos x$ و $\tan x$.

3- علما أن, $\tan(x) = 2\sqrt{2}$ و $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ فاحسب $\cos x$ و $\sin x$.

تمرين 7 :

بسط مايلي :

$$A = \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{14}\right)$$

$$B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3\cos(\pi - x) - 4\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin x$$

تمرين 8 :

1 - ليكن α من المجال $[-\pi, \pi]$ حيث $\tan\alpha = 3$

احسب : $E = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha(1 - 2\sin^2\alpha)$

2 - ليكن x و y من $[-\pi, \pi]$ حيث $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$ و $y \neq \pm\frac{\pi}{2}$ و $\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

بين أن : $1 + \tan^2(x) + \tan^2(y) = \tan^2(x) \cdot \tan^2(y)$





تمرين 9 :

ليكن x من المجال $\mathbb{R}$

1 - عمل التعبير التالي : $\cos^6x + \sin^6x - \frac{1}{4}$

2 - استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}$. $\cos^6x + \sin x^6 \geqslant \frac{1}{4}$

تمرين 10 :

ليكن x من المجال $]0,\pi[$ و $x \neq \frac{\pi}{2}$

نضع : $A(X) = (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x})^2$

1 - بين أن : $A(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

2- احسب $A(0)$ و $A\frac{2\pi}{3})$

3 - نضع $A(x) = 2$

احسب $\sin x$ و $\tan x$

تمرين 11 :

ليكن x من $\mathbb{R}$

نضع : $A(x) = 4\sin(\frac{37\pi}{2} - x) \times \cos(x - 2\pi) + \cos(x - \frac{\pi}{2}) \times \sin^3x$

1 - بين أن : لكل $k \in \mathbb{Z}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $A(x) = 1 + (\frac{1}{1 + \tan^2x})^2$

2- حدد قيمة $A(x)$ علما أن : $\cos x = \frac{1}{2}$

تمرين 12 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

* $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$
* $\tan(2x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
* $\sin^3x - \sin x = 0$
* $2\cos^2x + \cos x - 1 = 0$
* $\sin 3x = \cos(x + \frac{\pi}{4})$



تمرين 13 :

1- حل في المجال $[0, 2\pi]$

المعادلة : $2\cos 3x = 1$

2- حل في المجال $[-\pi, \pi]$ المعادلة $2.\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -\sqrt{2}$

حل في المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$\tan 4x = -1$

تمرين 14 :

1- حل في $[-\pi, 2\pi]$ المتراجحة

$\sqrt{2} - 2\cos x < 0$

2- حل في المجال $[0, \pi]$

المتراجحة : $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \leqslant \frac{1}{2}$

3- حل في المجال : $]-\pi, \pi[$

المتراجحة : $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant 0$

تمرين 15 :

نعتبر :

$p(x) = \sqrt{3}.\sin x - 2\sin^2 x$

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$p(x) = 0$

2 - أ – ادرس اشارة $p(x)$ على المجال $[0, 3\pi]$

ب – حل في المجال $[0, 3\pi]$ المتراجحة : $\sin x \leqslant \frac{2\sin^2 x}{\sqrt{3}}$





الإحصاء

- عدد الصفحات : [20]
- عدد التمارين : [11]
- عدد تمارين البحث : [03]



14 الإحصاء

1 - تعريف :

الإحصاء علم موضوعه جمع وتنظيم ظواهر عديدة قصد إيجاد تناسبات عديدة مستقلة عن الصدفة .

* الدراسة الإحصائية تتطلب تحديد المجموعة التي ستخضع لهذه الدراسة ويطلق عليها اسم الساكنة الإحصائية.

* كل عنصر من هذه المجموعة يسمى فردا أو وحدة إحصائية.

* الخاصية التي هي موضوع الدراسة تسمى ميزة إحصائية أو متغيرا إحصائيا. وهذه الميزة تكون إما كيفية أو كمية.

* x_i قيم الميزة.

* n_i الحصيص الموافق لـ x_i الحصيص الإجمالي هو مجموع الحصيصات.

$$N = n_1 + n_2 + \dots\dots\dots + n_p$$

* التردد f_i الموافق لقيمة الميزة x_i هو : $fi = \frac{n_i}{N}$

* النسبة المئوية P_i الموافقة لقيمة الميزة x_i هي : $P_i = f_i\ 100$

2 - وسيطات الوضع :

* **المنوال :** منوال متسلسلة إحصائية هو كل قيمة أو نوع أو صنف يتوفر على أكبر حصيص.

* **القيمة الوسيطة :** لتكن متسلسلة إحصائية ذات ميزة كمية و M عدد حقيقي حيث : حصيص القيم الأصغر قطعا من M وحصيص القيم الأكبر قطعا من M لا يفوقان نصف الحصيص الإجمالي. M يسمى القيمة الوسطية.

* **المعدل الحسابي :** لتكن (x_i , n_i) متسلسلة إحصائية حيث : $1 \leq i \leq p$ المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية هو : $\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots\dots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \dots\dots + n_p}$



3 ـ وسيطات التشتت :

لتكن (x_i , n_i) متسلسلة إحصائية حيث : $1 < i < p$.

تعريف 1 :

الانحراف المتوسط لهذه المتسلسلة الإحصائية هو :

$$e = \frac{n_1|x_1 - \bar{x}| + n_2|x_2 - \bar{x}| + \dots\dots\dots + |x_p - \bar{x}|}{n_1 + n_2 + \dots\dots\dots + n_p}$$

تعريف 2 :

مغايرة المتسلسلة الإحصائية هو :

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots\dots\dots + (x_p - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 + \dots\dots\dots + n_p}$$

تعريف 3 :

الانحراف الطرازي لهذه المتسلسلة الإحصائية هو : $\sigma = \sqrt{V}$



تمارين وحلولها

تمرين 1 :

نعتبر المتسلسلة الإحصائية الممثلة في الجدول التالي :

13	12	10	8	7	5	الميزة x_i
10	14	11	5	2	8	الحصيص x_i

1 – اعط جدول الحصيصات المتراكمة لهذه المتسلسلة.

2 – أ – حدد المنوال واحسب المعدل الحسابي.

ب – حدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة.

3 – احسب الانحراف المتوسط والمغايرة.

الجواب :

1 – جدول الحصيصات المتراكمة :

13	12	10	8	7	5	الميزة x_i
50	40	26	15	10	8	الحصيص x_i

2 – أ – منوال هذه المتسلسلة الإحصائية هو : 12

$$\bar{x} = \frac{5\times 8 + 7\times 2 + 8\times 5 + 10\times 11 + 12\times 14 + 13\times 10}{8+2+5+11+14+10}$$

$$\bar{x} = \frac{502}{50}$$

أي أن $\boxed{\bar{x} = 10,04}$

ب – لدينا الحصيص الإجمالي هو : $N = 50$

إذن : $\frac{N}{2} = 25$

وبالتالي القيمة الوسطية هي : $\boxed{m = 10}$

3 – الانحراف المتوسط لهذه المتسلسلة هو :

$$e = \frac{5 \times |10,04 - 5| + 2\,|10,04 - 7| + 5\,|10,04 - 8| + 11\,|10,04 - 10| + 14\,|10,04 - 12| + 10\,|10,04 - 13|}{8 + 2 + 5 + 11 + 14 + 10}$$

$$e = \frac{114,08}{50}$$

إذن : $e = 2,2816$

مغايرة هذه المتسلسلة هي :

$$V = \frac{5 \times (10.04 - 5)^2 + 2\,(10,04 - 7)^2 + 5\,(10,04 - 8)^2 + 11\,(10,04 - 10)^2 + 14\,(10,04 - 12)^2 + 10\,(10.04 - 13)^2}{8 + 2 + 5 + 11 + 14 + 10}$$

إذن

$$V = \frac{383,92}{50}$$

ومنه : $V \simeq 7,68$

تمرين 2 :

يبين الكشف التالي عدد المبيعات لمنتوج ما يوميا لمدة ثلاثين يوما.

8 - 3 - 14 - 12 - 8 - 3 - 14 - 14 - 8 - 8 - 8 3 - 14 - 8 - 3 - 8 - 8 - 12 - 12 - 14 - 12 - 14 - 12 - 14 - 12 - 14 - 8 - 8 - 8

1 – أ – أتمم الجدول التالي :

عدد المبيعات يوميا	3	8	12	14
عدد الأيام الحصيص	4			
الحصيص المتراكم				

ب – حدد المنوال.

2 – أنشئ مخططا عصويا للحصيصا المتراكمة.

3 – احسب المعدل الحسابي.

الجواب :

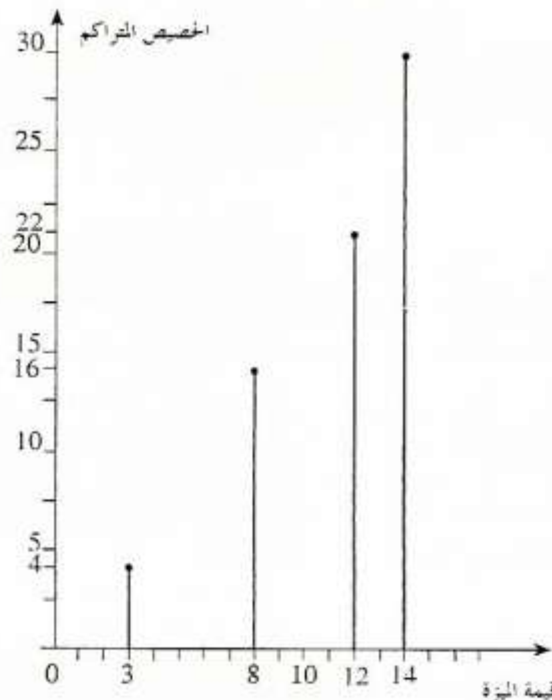
1 – أ – لدينا :

عدد المبيعات يوميا	3	8	12	14
عدد الأيام الحصيص	4	12	6	8
الحصيص المتراكم	4	16	22	30

ب – المنوال هو : 8 لأن 8 تتوفر على أكبر حصيص.



- 2



3 – المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة هو :

$$\bar{x} = \frac{3 \times 4 + 8 \times 12 + 12 \times 6 + 14 \times 8}{4 + 12 + 6 + 8}$$

$$\bar{x} = \frac{292}{30}$$

أي أن

$$\bar{x} \simeq 9,7$$

تمرين 3 :

الجدول التالي يعطينا قامات مجموعة من تلاميذ إحدى الثانويات :

الصنف	[140,146[	[146,152[	[152,158[	[158,164[	[164,170[	[170,176[
الحصيص	10	18	45	35	20	12

1 – احسب المعدل الحسابي وحدد الصنف المنوالي.

2 – أ – أنشئ المضلع الإحصائي للحصيص المتراكم.

ب – حدد القيمة المتوسطة.

3 – حدد النسبة المئوية للتلاميذ الذين قامتهم محصورة بين 146 و 164.

الجواب :

1 – نعتبر :

مركز الصنف	143	149	155	161	167	173
الحصيص	10	18	45	35	20	12

المعدل الحسابي هو :

$$\bar{x} = \frac{10 \times 143 + 18 \times 149 + 45 \times 155 + 35 \times 161 + 20 \times 167 + 12 \times 173}{10 + 18 + 45 + 35 + 20 + 12}$$

$$\bar{x} = \frac{22\,138}{140}$$

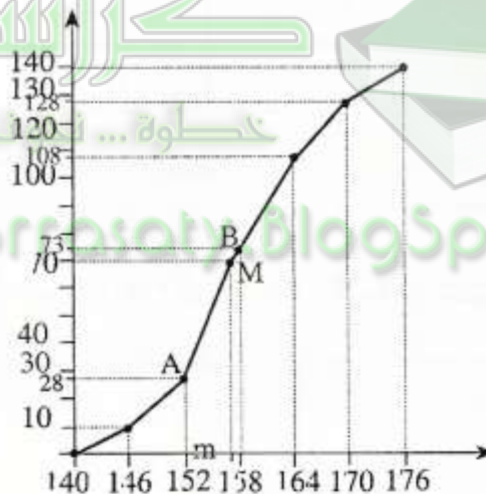
إذن : $\bar{x} \simeq 158$

الصنف المنوالي هو : $[152;158[$

2 –

أ) –

n_i	140	146	152	158	164	170	170	176
y_i	0	10	28	73	108	128	128	140



لدينا : $\frac{N}{2} = 70$

ب) – لتكن m هي القيمة الوسطية هذه المتسلسلة لدينا النقط $A(152,28)$ و $B(158\ ,\ 73)$

و $M(m\ ,\ 70)$ نقط مستقيمية ومنه. $\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right) = 0$

أي أن

$$\begin{vmatrix} m - 152 & 6 \\ 42 & 45 \end{vmatrix} = 0$$

أي أن

$$45\,(m - 152) - 42 \times 6 = 0$$

أي أن $45\,m = 45 \times 152 + 42 \times 6$

إذن $m = \dfrac{45 \times 152 + 42 \times 6}{45}$

$m = 157{,}6$

3) – النسبة المئوية للتلاميذ الذين قامتهم محصورة بين 142 و 164.

لدينا عدد التلاميذ الذين قامتهم محصورة بين : 146 و 164 هو : $18 + 45 + 35 = 98$

إذن النسبة المئوية للتلاميذ الذين قامتهم محصورة بين 146 و 164 هي :

$$\frac{98 \times 100}{140} = 70\%$$

تمرين 4 :

نعتبر المتسلسلة الإحصائية المعرفة بـــ :

الصنف	[0,20[	[20,40[	[40,60[	[60,80[	[80,100[
الحصيص	5	4	8	2	1

1 – أنشئ مدراج هذه المتسلسلة الإحصائية.

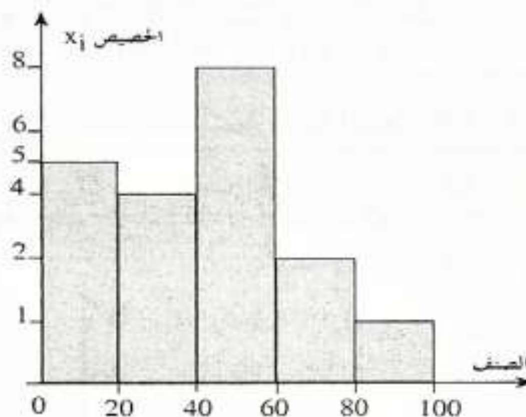
2 – احسب المعدل الحسابي والانحراف المتوسط.

3 – أنشئ المضلع الإحصائي للحصيص المتراكم ثم حدد القيمة الوسطية.

4 – اعط النسبة المئوية الموافقة للصنف [20,40[.

الجواب :

1 – المدراج :



2 – المعدل الحسابي والانحراف المتوسط.

نعتبر الجدول التالي :

90	70	50	30	10	مركز الصنف
1	2	8	4	5	الحصيص

المعدل الحسابي هو :

$$\overline{x} = \frac{5\times10+4\times30+8\times50+2\times70+1\times90}{5+4+8+2+1}$$

$$= \frac{800}{20} = 40$$

إذن $\boxed{\overline{x} = 40}$

الانحراف المتوسط هو :

$$e = \frac{5\times|40-10|+4|40-30|+8|40-50|+2|40-50|+2|40-70|+1|40-90|}{5+4+8+2+1}$$

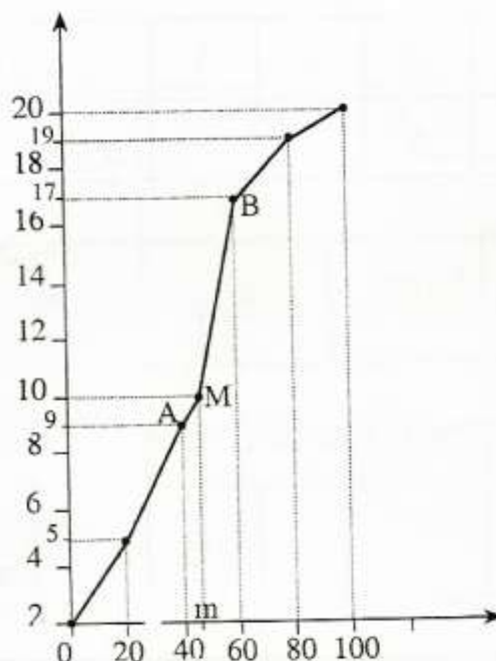
$$= \frac{380}{20}$$

إذن : $\boxed{e = 19}$

3 – القيمة الوسطية والمضلع الإحصائي. ننشئ المضلع الإحصائي للحصيص المتراكم بالجدول التالي :

100	80	60	40	20	0	x_i
20	19	17	9	5	0	yi

لدينا : $\frac{N}{2} = 10$





لتكن m هي القيمة الوسطية إذن النقطة M (m , 10) تنتمي إلى المضلع الإحصائي.

لدينا النقط A (40 , 9) و B (60 , 17) و M (m , 10) مستقيمية أي أن

أي أن $\det(\vec{AM}, \vec{AB}) = 0$

أي أن $\begin{vmatrix} m-40 & 20 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 0$

تكافئ $8m - 320 - 20 = 0$

إذن $8m = 340$ أي أن $m = 42{,}5$

4 – النسبة المئوية :

$$\frac{4 \times 100}{20} = 20\%$$

تمرين : 5

حصل تلاميذ أحد الأقسام في أحد فروض مادة الرياضيات على النقط التالية :

10 - 5 - 16 - 10 - 12 - 10 - 10 - 8 - 5 - 12 - 10 - 16 - 8 - 12 - 5

1 – نظم هذه المتسلسلة في جدول.

2 – مثل هذه المتسلسلة الإحصائية بمخطط عصوي.

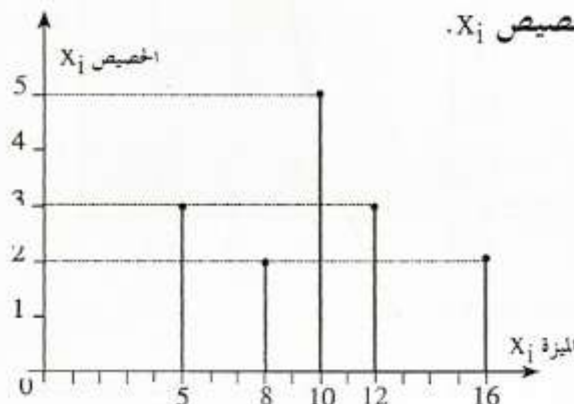
3 – احسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية.

الجواب :

1 – لدينا

الميزة x_i	5	8	10	12	16
الحصيص h_i	3	2	5	3	2

2 – المخطط العصوي للحصيص x_i.



3 – المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية هو :

$$\bar{x} = \frac{5\times3+8\times2+10\times5+12\times3+16\times2}{3+2+5+3+2}$$

$$= \frac{149}{15}$$

إذن $\bar{x} \simeq 9,26$

تمرين 6 :

صنفت مقاولة عدد طلبات الشغل الواردة عليها حسب أعمار الراغبين على الشكل التالي :

الصنف	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[	[40,45[	[45,50[
الحصيص	30	25	20	10	15	10
الحصيص المتراكم						

1 – انقل الجدول ثم أتممه.

2 – احسب التردد الموافق للأعمار المحصورة بن 20 و 35.

3 – احسب المعدل الحسابي.

4 – أنشئ مدراج الحصيصات والمضلع الإحصائي الموافق.

الجواب :

1 – لدينا :

الصنف	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[	[40,45[	[45,50[
الحصيص	30	25	20	10	15	10
الحصيص المتراكم	30	55	75	85	100	110

2 – التردد الموافق للاعمار المحصورة بين 20 و 35 هو :

$$f = \frac{30+25+20}{100}$$

$$= \frac{75}{100}$$

$$f = 0,75$$



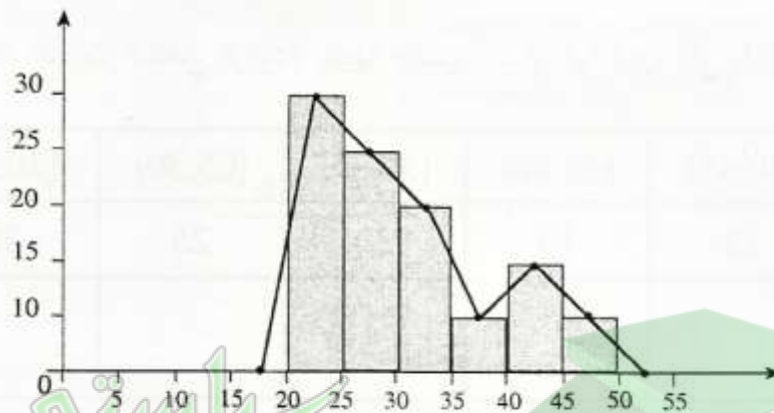
3 – المعدل الحسابي هو :

$$\bar{x} = \frac{22{,}5 \times 30 + 27{,}5 \times 25 + 32{,}5 \times 20 + 37{,}5 \times 10 + 42{,}5 \times 15 + 47{,}5 \times 10}{30 + 25 + 20 + 10 + 15 + 10}$$

$$\bar{x} = \frac{3500}{110}$$

إذن : $\bar{x} \simeq 31{,}8$

4 – مدراج الحصيصات والمضلع الإحصائي الموافق :



تمرين : 7

الكشف التالي يعطينا عدد ساعات الغياب عند تلاميذ :

4 - 1 - 2 - 1 - 3 - 5 - 4 - 3 - 5 - 1 - 3 - 4 - 2 - 4 - 3 - 1 - 5 - 1 - 4 - 4.

1 – أوجد جدولا للحصيصات والحصيصات المتراكمة.

2 – أ – احسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية.

ب – احسب الانحراف الطرازي σ لهذه المتسلسلة الإحصائية.

3 – أنشئ المخطط العصوي لهذه المتسلسلة.

الجواب :

1 – جدول الحصيص والحصيص المتراكم.

قيمة الميزة	1	2	3	4	5
الحصيص	5	2	4	6	3
الحصيص المتراكم	5	7	11	17	20



2 – أ – المعدل الحسابي هو :

$$\bar{x} = \frac{1\times5+2\times2+3\times4+4\times6+5\times3}{5+2+4+6+3} = \frac{60}{20}$$

إذن : $\bar{x} = 3$

ب – نعلم أن الانحراف الطرازي هو : $\sigma = \sqrt{V}$

حيث V هي المغايرة.

لدينا

$$V = \frac{5(3-1)^2+2(3-2)^2+4(3-3)^2+6(3-4)^2+3(3-5)^2}{5+2+4+6+3}$$

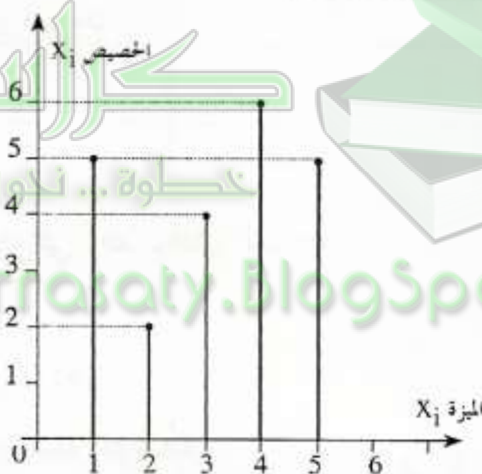
$$= \frac{50}{20}$$

إذن $V = 2,5$

$$\sigma = \sqrt{2,5}$$

ومنه : $\sigma \simeq 1,6$

3 – المخطط العصوي :



تمرين : 8

الجدول التالي يعطينا عدد الأطباء وأطباء الأسنان لـ 100 000 ساكن في سنة 1996 لستة دول من أوربا.

الدول	ألمانيا	بلجيكا	إسبانيا	فرنسا	اليونان	إيطاليا
الأطباء	341	378	422	297	403	570
أطباء الأسنان	75	70	38	68	103	64

1 – احسب معدل الأطباء وأطباء الأسنان ل 100 000 ساكن في هذه الدول.

2 – حدد المنوال لكل ميزة.





الجواب :

1 – معدل الأطباء لـ 100 000 ساكن في هذه الدول هو :

$$\bar{x}_1 = \frac{341+378+422+297+403+570}{6} = \frac{2411}{6}$$

إذن : $\bar{x}_1 \simeq 402$

معدل أطباء الأسنان لـ 100 000 ساكن في هذه الدول هو :

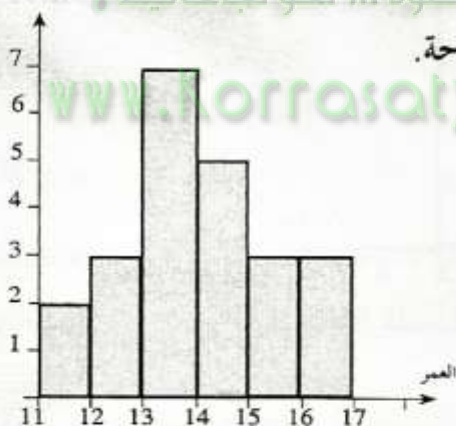
$$\bar{x}_2 = \frac{75+70+38+68+103+64}{6} = \frac{418}{6}$$

إذن : $\bar{x}_2 \simeq 70$

2 – منوال ميزة الأطباء هو : إيطاليا.

منوال ميزة أطباء الأسنان هو : اليونان.

تمرين : 9



المدراج التالي يعطينا أعمار منخرطي أحد نوادي السياحة.

1 – ماهو عدد المنخرطين ؟

2 – اعط جدولا للحصيص والتردد.

3 – احسب المعدل الحسابي والقيمة المتوسطة.

الجواب :

1 – عدد المنخرطين هو : $2+3+7+5+4+4=25$

2 – جدول الحصيص والتردد :

الصنف	[11,12[	[12,13[	[13,14[	[14,15[	[15,16[	[16,17[
الحصيص	2	3	7	5	4	4
التردد	0,08	0,12	0,28	0,2	0,16	0,16

3 – المعدل الحسابي أو العمر المتوسط هو :

$$\bar{x} = \frac{11{,}5\times 2 + 12{,}5\times 3 + 13{,}5\times 7 + 14{,}5\times 5 + 15{,}5\times 4 + 16{,}5\times 4}{8+2+5+11+14+10}$$

$$\bar{x} = \frac{355{,}5}{25}$$

إذن : $\boxed{\bar{x} = 14{,}22}$

القيمة المتوسطة :

ننشئ المضلع الإحصائي للحصيص المتراكم :

x_i	0	11	12	13	14	15	16
الحصيص المتراكم	0	2	5	12	17	21	25

لدينا $N = 25$ إذن $\frac{N}{2} = 12{,}5$

لتكن m هي القيمة المتوسطة :

لدينا $M(m , 12{,}5)$ و $A(13 , 12)$ و $B(14 , 17)$

إذن $\overrightarrow{AM}(m - 13 , 0{,}5)$ و $\overrightarrow{AB}(1 , 5)$

A و B و M مستقيمية تكافئ $\det\left(\overrightarrow{AM} , \overrightarrow{AB}\right) = 0$

أي أن $\begin{vmatrix} m - 13 & 1 \\ 0{,}5 & 5 \end{vmatrix} = 0$ أي أن $5(m - 13) - 0{,}5 = 0$

إذن

إذن $m - 13 = \frac{0{,}5}{5}$ إذن : $\boxed{m = 13{,}1}$



تمرين : 10

ليكن المنحنى الممثل لقيم عدد إخوة كل تلميذ من مجموعة تتكون من خمسين تلميذا.

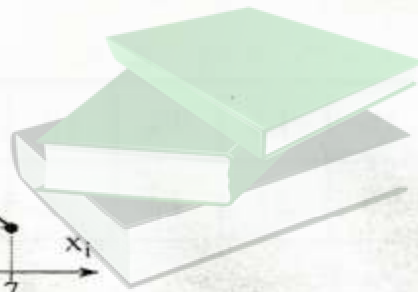
1 – ماهو منوال هذه المتسلسلة الإحصائية ؟

2 – اعط جدولا للحصيص والحصيص المتراكم.

3 – احسب المعدل الحسابي والانحراف الطرازي.

4 – حدد النسبة المئوية لعدد العائلات التي لها أكثر من 5 أطفال.





الجواب :

1 – المنوال هو : 1 لأنه هو قيمة الميزة التي تتوفر على أكبر حصيص $x_i = 13$.

2 – جدول الحصيص والحصيص المتراكم.

قيمة الميزة x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
الحصيص x_i	10	13	8	6	5	5	2	1
الحصيص المتراكم	10	23	31	37	42	47	49	50

3 – المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة هو :

$$\overline{x} = \frac{0\times10+1\times13+2\times8+3\times6+4\times5+5\times5+6\times2+7\times1}{50}$$



$\bar{x} = \frac{111}{50}$

إذن : $\bar{x} \simeq 2,2$

لتكن V مغايرة المتسلسلة الإحصائية.

$$V = \frac{(0-2,2)^2 \times 10 + (1-2,2)^2 \times 13 + (2-2,2)^2 \times 8 + (3-2,2)^2 \times 6 + (4-2,2)^2 \times 5 + (5-2,2)^2 \times 5 + (6-2,2)^2 \times 2 + (7-2,2)^2 \times 1 + (7-2,2)^2 \times 1}{50}$$

$$V = \frac{172,60}{50}$$

إذن $V \simeq 3,45$

إذن الانحراف الطرازي هو : $\sigma = \sqrt{V}$

$\sigma \simeq \sqrt{3,45}$

إذن : $\sigma \simeq 1,86$

4 – النسبة المئوية لعدد العائلات التي لها أكثر من 5 أطفال هي :

$P = \frac{3}{50} \times 100 = 6\ \%$

تمرين : 11

الكشف التالي يعطينا دراجات الحرارة على الساعة 12 خلال 17 يوم في نفس المكان.

25 - 15 - 15 - 18 - 25 - 25 - 21 - 25 - 25 - 18 - 13 - 15 - 13 - 12 - 15 - 21 - 18

1 – أتمم الجدول التالي :

درجة الحرارة	12	13	15	18	21	25
الحصيص						
الزاوية بالدرجة						

2 – أنشئ مخططا دائريا موافقا للحصيص.

3 – احسب النسبة المئوية الموافقة للحرارة 15°.

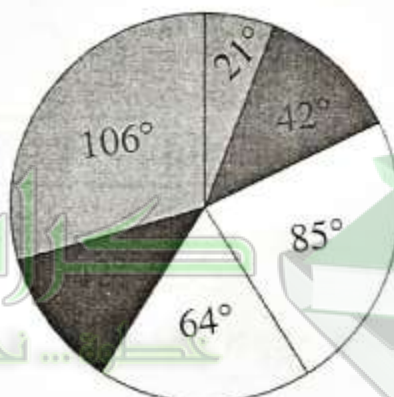
4 – احسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة.

الجواب :

1 – لدينا :

درجة الحرارة	12	13	15	18	21	25
الحصيص	1	2	4	3	2	5
الزاوية بالدرجة	21°	42°	85°	64°	42°	106°

2 – المخطط الدائري الموافق للحصيص :



3 – النسبة المئوية الموافقة للحرارة : 15 هي :

$$P = \frac{4 \times 100}{17}$$

إذن $P \simeq 24\ \%$

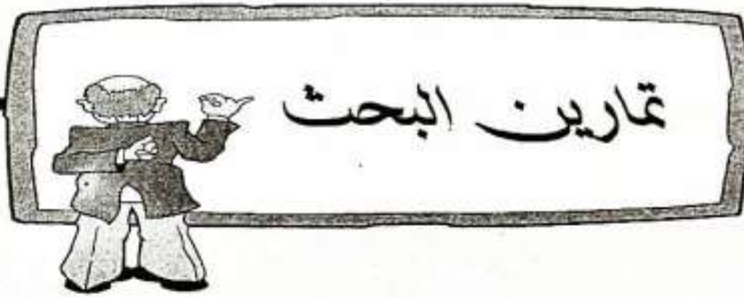
4 – المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة هو :

$$m = \frac{12 \times 1 + 13 \times 2 + 15 \times 4 + 18 \times 3 + 21 \times 2 + 25 \times 5}{17}$$

إذن

$$m = \frac{319}{17}$$

إذن : $m \simeq 18,8$



تمرين 1 :

اعطت مصلحة المحاسبة بأحد الأبناك الجدول الإحصائي التالي الذي يخص مئة زبون :

كمية النقود المودعة في البنك بالدرهم	عدد الزبناء
1000	10
3000	30
5000	30
10000	20
50000	10

1 – احسب الترددات والنسب المئوية مثل هذه المتسلسلة الإحصائية بمخطط بالعصي ثم انشئ مضلع الحصيصات المتراكمة.

2 – احسب وسيطات الوضع.

3 – احسب وسيطات التشتت.

تمرين 2 :

الجدول التالي يعطي عدد الأجانب المقيمين بالمغرب حسب إحصاء 1966.

الجنسية	عدد الأفراد
الفرنسيون	175090
الإسبان	92901
الجزائريون	93026
أجانب آخرون	34866



1 – احسب الترددات والنسب المئوية.

2 – مثل هذه المتسلسلة الإحصائية بمخطط الأشرطة وبمخطط قطاعي.

3 – حدد المنوال.

تمرين 3 :

يتكون قسم من 35 تلميذا. وآخر امتحان للغة الأنجليزية كان معدل التلميذات هو 12 وكان معدل الأولاد هو 9.5.

ماهو عدد الذكور وماهو عدد الإناث في هذا القسم علما أن المعدل للقسم هو 10.5.

